

# Список вопросов по межфакультетскому курсу «Основы алгебры: история, методы, приложения»

Канунников Андрей Леонидович,

к.ф.-м. н., н. с. кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ

Пункты, отмеченные звёздочкой, необязательны.

1. Группы: определение и примеры. Циклические группы. Подгруппы.
2. Группа перестановок. Разложение на независимые циклы. Знак перестановки. Задача Ллойда об игре «15» (\*).
3. Группы диэдра и их подгруппы.
4. Группы изометрий и вращений тетраэдра, куба и октаэдра, а также (\*) додекаэдра и икосаэдра.
5. Конечные подгруппы в группе изометрий плоскости  $\mathbb{R}^2$  и (\*) пространства  $\mathbb{R}^3$ .
6. Поля: определение и примеры. Поле вычетов по простому модулю.
7. Малая теорема Ферма. Теорема Эйлера (\*). Их интерпретация на языке теории групп.
8. Векторное пространство: определение, понятия базиса и размерности. Основная лемма о линейной зависимости.
9. Системы линейных уравнений  $2 \times 2$ . Формулы Крамера. Линейные отображения плоскости и их матрицы.
10. Определители  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ , их геометрический смысл. Обобщение на общий случай  $n \times n$  (\*).
11. Группа невырожденных матриц над полем  $\mathbb{R}$ , её подгруппа ортогональных матриц, их геометрический смысл.
- 12\*. Целочисленные плоские решётки и фундаментальные параллелограммы. Критерий фундаментальности: единичная площадь. Индекс решётки, его связь с определителем, их мультипликативность.
13. Скалярное произведение на плоскости и в пространстве. Ортонормированные базисы.
14. Движения плоскости, их классификация: теорема Шаля.
15. Неравенства Коши—Буняковского и треугольника, теорема косинусов, коэффициенты Эйлера—Фурье, их геометрический смысл.
- 16\*. Теорема Эйлера о вращениях в  $\mathbb{R}^3$ .
- 17\*. Кватернионы, их применения в геометрии и физике.
- 18\*. Квадратичные формы, их сигнатуры, геометрический смысл. Приведение к главным осям, приложения в механике.
19. Комплексные числа: определение, арифметические операции, тригонометрическая форма, формулы Муавра.
20. Многочлены от одной переменной: делимость, деление с остатком, разложение на неприводимые.
21. Формула включений и исключений, её связь с законами де Моргана и теоремой Виета. Формула обращения Мёбиуса (\*) и её применения.
22. Числа Фибоначчи. Решения рекуррентных соотношений второго порядка, любого (\*) порядка.
23. Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы. Формула Бернсайда. Задача о числе ожерелий.
- 24\*. Эрлангенская программа Клейна. Группы движений в евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского. Аффинная и проективная группы.
- 25\*. Группы преобразований в классической механике (группа Галилея) и релятивистской механике (группа Пуанкаре).
- 26\*. Конгруэнции и нормальные подгруппы. Гомоморфизмы, факторгруппы. Теорема об изоморфизме.
27. Представления групп: определение и примеры. Инвариантные подпространства, неприводимые представления. Неприводимые представления групп  $\mathbb{Z}_n$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  (действительные и комплексные).