

Программа межфакультетского курса «Основы алгебры: история, методы, приложения»

Канунников Андрей Леонидович,
к.ф.-м. н., н. с. кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ

Комплексные числа и многочлены

1. История открытия и развитие теории комплексных чисел. Алгебра комплексных чисел.
2. Геометрия умножения на комплексное число. Прояснение связи между тригонометрией и экспонентой. Формула Эйлера.
3. Формулы Муавра. Многочлены Чебышёва.
4. Применения комплексных чисел в геометрии.
- 5*. Построение правильного 17-угольника. Необходимые сведения о полях и алгебраических числах.
- 6*. Основная теорема алгебры: обзор доказательств и главные идеи.
7. Делимость многочленов от одной переменной: алгоритм Евклида, сравнения по модулю, разложение на множители.
- 8*. Многочлены от нескольких переменных. Базисы Грёбнера и их применения.

Начала линейной алгебры

9. Системы линейных уравнений 2×2 . Линейные отображения плоскости и их матрицы. Обобщения на многомерный случай.
10. Движения плоскости, их классификация (теорема Шаля).
11. Базис и размерность векторного пространства. Основная лемма о линейной зависимости.
12. Определитель, его геометрический смысл и применения. Знак определителя и ориентация базисов.
13. Целочисленные плоские решётки и фундаментальные параллелограммы. Критерий фундаментальности: единичная площадь. Индекс решётки, его связь с определителем, их мультипликативность.
14. Линейные операторы, характеристические многочлены, проблема диагонализруемости. Комплексификация.
15. От школьной геометрии к евклидовому пространству: неравенства Коши—Буняковского, треугольника, теорема косинусов, коэффициенты Эйлера—Фурье, их геометрический смысл. Теорема Эйлера о вращениях в \mathbb{R}^3 .
16. Квадратичные формы, их сигнатуры, геометрический смысл. Приведение к главным осям, приложения в механике.
- 17*. Кватернионы, их применения в геометрии и физике.

Элементы комбинаторики

18. Основные комбинаторные числа. Комбинаторные соображения в задачах на делимость.
19. Перестановки, их чётность. Задача Ллойда об игре «15». Кубик Рубика (*).
20. Формула включений и исключений, её связь с законами де Моргана и теоремой Виета. Формула обращения Мёбиуса (*) и её применения.
21. Числа Фибоначчи. Комбинаторные задачи, приводящие к линейным рекуррентным соотношениям, метод их решения. Подробно: рекуррентны второго и третьего порядков. Случай кратных корней. Кратко: связь с жордановой формой и линейными дифференциальными уравнениями (*).
22. Дискретные аналоги дифференцирования и интегрирования, методы суммирования, преобразование Абеля.

Вычеты и сравнения по модулю

23. Сравнения по модулю в кольце целых чисел. Кольцо вычетов.
24. Алгоритм Евклида, НОД, обратимые вычеты. Поле вычетов по простому модулю.

25. Малая теорема Ферма, теорема Эйлера и теорема Вильсона: алгебраические и комбинаторные доказательства. Применения в теории кодирования (*).

Элементы теории групп

26. История создания теории групп: проблема разрешимости уравнений в радикалах (Лагранж, Руффини, Абель, Галуа), перестановки переменных в многочленах.

27. От группы перестановок к абстрактной группе. Подгруппы, смежные классы, теорема Лагранжа. Циклические группы.

28. Действия групп. Орбиты и стабилизаторы. Формула орбит.

29. Задача о числе ожерелий. Формула Бернсайда.

30. Группы преобразований плоскости и пространства, их подгруппы. Группа диэдра.

31. Группы изометрий правильных многогранников. Группы симметрий некоторых кристаллов.

32. Эрлангенская программа Клейна. Группы движений в евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского. Аффинная и проективная группы.

33*. Группы преобразований в классической механике (группа Галилея) и релятивистской механике (группа Пуанкаре).

34. Конгруэнции и нормальные подгруппы. Гомоморфизмы, факторгруппы. Теорема об изоморфизме.

35. Элементы теории представлений групп.