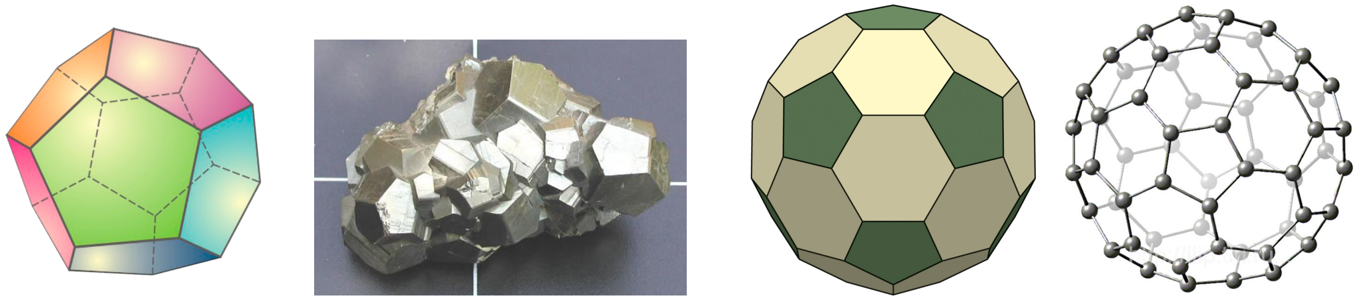
Межфакультетский курс
«Основы алгебры: история, методы, приложения»

Канунников Андрей Леонидович,
к.ф.-м. н., н. с. кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ

Мы познакомим слушателей с методами и языком алгебры, её приложениями в некоторых областях естествознания и других разделах математики. Центральные сюжеты курса построены вокруг одного из главных понятий алгебры — понятия *группы*.

- *Группы симметрии плоских орнаментов, правильных многогранников, кристаллических решёток.* На языке алгебры удобно описывать и исследовать симметрию, которая нас окружает и проявляется в самых разных областях — от правильных паркетов и мозаик в декоративном искусстве до атомных структур кристаллов и химических соединений. Важный источник симметрии доставляют правильные и полуправильные многогранники, причём многие из них можно встретить природе (см. рис.) Мы найдём их группы симметрий, а также опишем все конечные группы изометрий в трёхмерном пространстве.



Форму правильного додекаэдра можно найти в кристалле пирита FeS_2, а футбольный мяч и молекула фуллерена имеют форму усечённого икосаэдра.

- *Группы в геометрии и физике.* Все знакомы со школы с евклидовой геометрией. Она, однако, описывает наш мир лишь в первом приближении. В XIX веке уже были хорошо изучены и другие геометрии: аффинная, проективная, сферическая, геометрия Лобачевского и др. В 1872 г. Феликс Клейн выступил со своей знаменитой *Эрлангенской программой*, в которой классифицировал геометрии в соответствии с группами их преобразований. Например, в евклидовой геометрии это группа движений (сдвиги, повороты, отражения и их композиции), в аффинной геометрии преобразований больше (композиции любых линейных преобразований со сдвигами). Предложенная алгебраическая концепция оказалась исключительно плодотворной и для физики: группы преобразований пространства-времени описывают симметрию физических законов (их независимость при смене инерциальной системы отсчёта). В классической механике это группа Галилея, в релятивистской — группа Пуанкаре.

- *Алгебра в комбинаторике.* Многочлены и их родственники — степенные ряды — являются вполне стандартными инструментами при решении задач перечислительной комбинаторики. Главную идею можно пояснить коротко: количества тех или иных комбинаций, которые требуется сосчитать, в переводе на алгебраический язык становятся коэффициентами некоторых рядов, составленных из условия комбинаторной задачи. Эта идея — лишь вершина айсберга — теории производящих функций. Мы познакомим слушателей с основами этой теории и элементами теории Пойа и покажем, как они применяются для решения классических задач: подсчёте числа ожерелий, числа раскрасок куба и других правильных многогранников, числа изомеров парафинов C_nH_{2n+2} и некоторых других.

От слушателей не требуется специальной подготовки. Все необходимые понятия из университетского курса алгебры мы введём и разъясним на многочисленных примерах. Значительная часть курса будет посвящена методам и применениям элементарной алгебры, сюда войдут основы теории комплексных чисел и многочленов, комбинаторики и делимости, линейной алгебры и геометрии. Таким образом, будет построен мостик между школьной алгеброй и наукой, которую сегодня принято называть *высшая алгебра*.

Отдельное внимание мы уделим истории появления и развития алгебраических понятий и идей. Это не только расширит кругозор слушателей, но и поможет разобраться в задачах, для решения которых эти новые понятия и идеи появились.