

# Вопросы к зачету по курсу "Флуктуации в природе и культуре "

Каждый билет соответствует одной лекции. По каждой лекции даются варианты заданий на выбор студента. Выполнение этих заданий освобождает от зачета в конце семестра. Можно решить задачу или написать эссе по изучаемому вопросу, а иногда будет так же дано графическое задание. Студентам выдаются необходимые для выполнения заданий тексты, изображения, а также бумага и заготовки для графических работ. Наиболее интересные работы студентов обсуждаются на следующей лекции и могут быть использованы при чтении курса в следующие годы.

1.

## задача

Рассмотрим модель двумерного движения  $N$  молекул идеального газа в сосуде длиной  $a$  и шириной  $b$ , при температуре  $T$ . Молекулы представлены шариками радиуса  $r_0$ , сталкивающимися друг с другом и со стенками по закону упругого удара. Шарик может влетать в выделенный объем  $V \ll ab$ , через отверстие в перегородке длиной  $c$ . Оцените среднее значение для какой-нибудь из следующих флуктуирующих величин

- 1 Угол  $\varphi$  между направлением вектора скорости шарика и осью  $Ox$
- 2 Угол  $\psi$  падения шарика на стенку
- 3 Проекция  $v_x$  скорости шарика на ось  $Ox$
- 4 Координата шарика  $x$
- 5 Величина равная 1, если последнее столкновение шарика со стенкой было именно с левой стенкой (длиной  $a$ ), и равная 0, если с другой стенкой
- 6 Число шариков  $M_V$ , оказавшихся в данный момент в выделенном малом объеме  $V$

## тема для эссе

Прокомментируйте отрывок из Божественной комедии Данте Алигьери. Какие флуктуирующие величины тут упомянуты? Какие строки можно считать поэтическим определением флуктуаций

64

Я под случайным мыслю всякий вид  
Созданий, все, что небосвод кружащий  
Чрез семя и без семени плодит.

67

Их воск изменчив, наравне с творящей  
Его средой, и потому чекан  
Дает то смутный оттиск, то блестящий.

70

Вот почему, при схожести семян,  
Бывает качество плодов неравно,  
И разный ум вам от рожденья дан.

73

Когда бы воск был вытоплен исправно  
И натиск силы неба был прямой,  
То блеск печати выступал бы явно.

76

Но естество его туманит мглой,  
Как если б мастер проявлял уменье,  
Но действовал дрожащею рукой.

## графическое задание

Изобразите три траектории молекулы идеального газа с большой, малой и средней дисперсиями длин пробегов.

2.

## задача

Найдите математическое ожидание и дисперсию для случайной величины, распределенной по закону Пуассона

$$P_k = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}, \quad k \geq 0$$

#### тема для эссе

Приведите свои примеры дискретных величин, распределенных по закону Пуассона.

#### тема для эссе

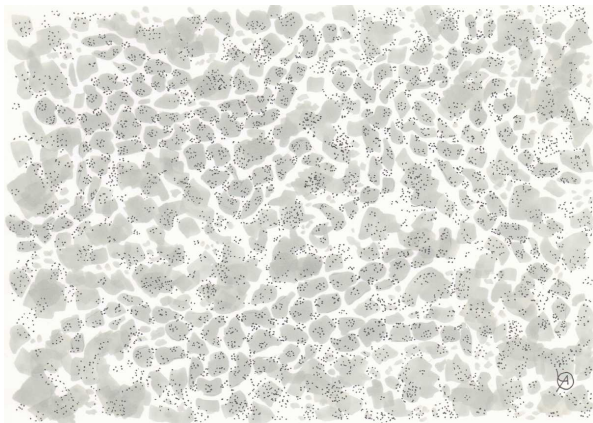


Рис. 1: Случайность на камуфляже

То, что нам на глаз кажется случайным, Пуассоновским, на самом деле часто является квазипериодическим. Так что создание случайных структур и процессов лучше доверить компьютеру. Например, дизайнер создает камуфляжный костюм со случайными пятнами. На самом деле пятна получатся примерно близкими по размеру и по расстояниям между ними. На рисунке показаны десантники в маск-халатах, ползущие по осенним листьям. Попробуйте понять, сколько их, учитывая, что рисунок на их костюмах сделан человеком. Укажите другие примеры мнимой случайности.

#### графическое задание

Изобразите предмет, в основе дизайна которого лежит пуассоновская последовательность каких-либо элементов.

3.

#### задача

Найдите математическое ожидание и дисперсию для случайной величины, распределенной по нормальному закону

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma^2}\right).$$

#### тема для эссе

Опишите процесс в доске Гальтона с точки зрения шарика, движущегося в ней.

#### тема для эссе

Приведите примеры из литературы, когда большие отклонения от среднего значения какой-либо характеристики персонажа играли существенную роль в развитии событий: Дюймовочка (рост), Шерлок Холмс (ум), Обломов (лень).

#### тема для эссе

Назовите авторов или художников, чей авторский стиль можно узнать по тому признаку, что какая-то величина принимает значения, далеко отстоящие от среднестатистических. (Например, в работах художников-примитивистов у всех людей большие головы).

#### графическое задание

Набор кружков на двух половинах листа подчиняется двум различным распределениям. Размеры одних кружков описываются экспоненциальным распределением, а вторых — гамма-распределением. Определите, какая половина соответствует снежинкам, а какая дождевым каплям, дорисуйте их и добавьте соответствующий фон.

4.

#### задача

На рисунке представлен лабиринт для экспериментов над жуками. Изначально голодный жук находится в одной из четырех круглых камер. На каждом временном шаге жук вбегает в один из выходящих из камеры коридоров и пробегает его до конца. Номер камеры будет случайной величиной. Выбор жуком коридора совершенно произвольный, то есть все возможные выходы из камеры равновероятны, но куда-то он точно побегит. Жук почти не обучается, не запоминает, откуда он пришел, поэтому его поведение можно описать как марковский процесс. Запишите матрицу вероятностей переходов.

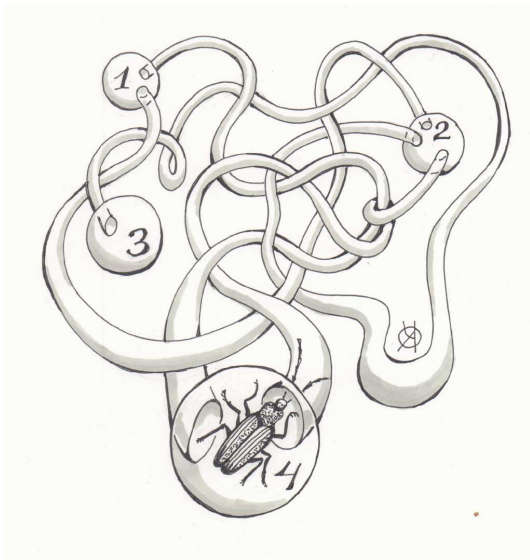


Рис. 2: Модель процесса марковских переходов

**задача**

Запишите управляющее уравнение для процесса распада атома с периодом полураспада  $\lambda$  и сравните с уравнением для процесса Пуассона.

**задача**

Рассмотрите ассиметричное одномерное случайное блуждание на дискретной решетке, описывающее диффузию в присутствии внешней силы. Вероятность скачка направо  $p > 1/2$ . Найдите первый и второй моменты.

**задача**

Для применения модели дискретных марковских процессов в общем случае важно знать время корреляции реального процесса и выбирать в качестве временного шага время большее времени корреляции. Для следующих дискретных случайных величин (1 — 5) подберите подходящий масштаб времен корреляции и, соответственно, шагов в модели марковского процесса: миллисекунды, секунды, сутки, года, столетия.

1. Число зарегистрированных комет
2. Число особей в популяции крупных млекопитающих
3. Число импульсов, принятых нейроном
4. Номер игрока, владеющего шайбой, во время хоккейного матча

**5. Число инфицированных во время эпидемии.**

**тема для эссе**

Найдите примеры изменяющихся дискретных величин в истории и литературе (например, число крупных городов, входивших в состав Византийской империи; число сопровождающих Фродо). При каком условии изменение этого числа можно считать марковским?

5.

**задача**

В сосуде с молекулами идеального газа есть воображаемая перегородка перпендикулярная оси  $Ox$ . Импульсный процесс описывает моменты пересечения молекулами этой перегородки в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси  $Ox$ . Постройте приблизительный график импульсного процесса, соответствующий следующим ситуациям:

- 1 Пересечение единственной частицей в сосуде воображаемой перегородки
- 2 Пересечение одной, выделенной из многих, частицей в газе воображаемой перегородки
- 3 Пересечение любой частицей в газе воображаемой перегородки.

**задача**

Броуновская частица совершает переходы между двумя потенциальными ямами под действием тепловых шумов. При этом она большую часть времени находится в той или другой потенциальной яме, причем, чем глубже яма, тем дольше среднее время пребывания в ней частицы. ИП описывает переходы через потенциальный барьер в ту или иную сторону. Постройте график импульсного процесса. Рассмотрите так же случай двух ям одинаковой глубины.

**задача**

Определите, какая картинка соответствует субпуассоновской, а какая суперпуассоновской статистике; какая положительной, а ка-

кая отрицательной корреляции. Лисы тщательно охраняют свою территорию определенного размера. Эта территория обозначена метками, все другие лисицы с нее прогоняются. Поэтому, встретив одну лису маловероятно встретить другую в ближайшее время. А лисички растут колониями, принадлежащими к одной микоризе, поэтому, найдя одну, есть большая вероятность найти следующую. Подберите параметры, которыми могут быть описаны эти процессы.

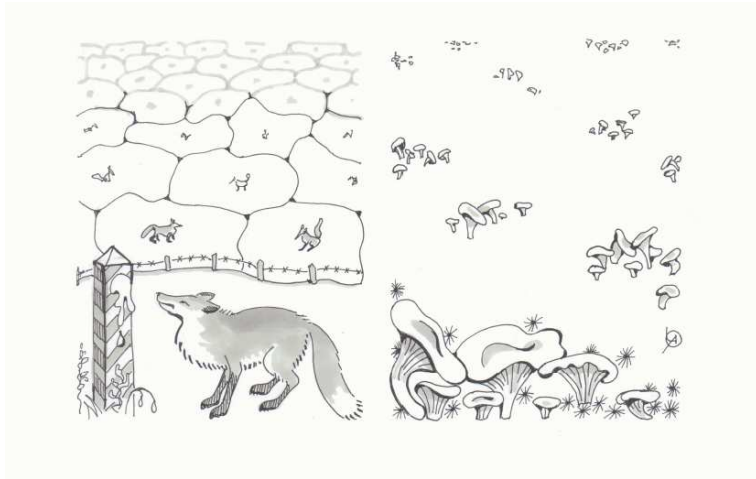


Рис. 3: Лисицы и лисички

**тема для эссе**

Проанализируйте влияние на историю какого-нибудь народа или города внешних импульсных процессов (например таких как, засухи, нашествия саранчи, набеги кочевников). Оцените примерно статистические характеристики этих процессов.

**графическое задание**

На основе графиков процессов с положительной и отрицательной периодичностью придумайте дизайн какого-то предмета. Какой тип процесса больше подходит для создания арт-объектов?

6.

**задача**

Рассмотрим процесс регистрации космических частиц счетчиком с рефрактерным временем. Регистрация каждой частицы моделируется  $\delta$ -импульсом в соответствующий момент времени с постоянной амплитудой

$f_0$ . Он представляет собой важный пример процесса с регулируемой периодичностью: импульсный пуассоновский процесс  $\eta(t)$  с рефрактерным временем  $\vartheta_0$ . Докажите, что  $T = \vartheta_0 + 1/p$ . А именно, если среднее время между двумя последовательными регистрациями частиц  $T$  будет фиксированным, то, чем больше рефрактерное время  $\vartheta_0$ , тем больше вероятность  $p$  появления следующего импульса, как только это время задержки закончится. В пределе  $\vartheta_0 \rightarrow T$  получается периодический процесс. Таким образом можно регулировать периодичность процесса, меняя  $\vartheta_0$ .

**задача** На рисунке две структуры из 64 слу-

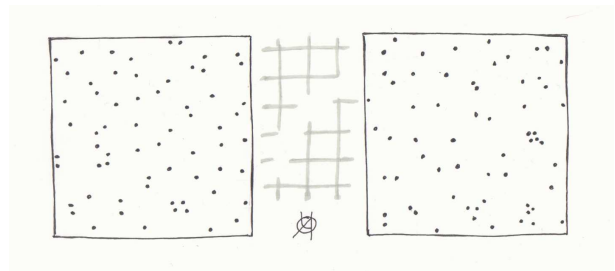


Рис. 4: Структуры. Левая — А, правая — В

чайных точек. Одна получена путем разбиения листа на клеточки. Каждая точка ставится в произвольном месте в клетке. Вторая структура получена без клеточек с примерно таким же распределением расстояний между точками. Какой из них является структура А? Как это доказать?

**тема для эссе**

Приведите примеры стихотворений (1) с простым периодическим ритмом; (2) наоборот, верлибр, где почти никакой периодичности нет; (3) наиболее удачное, на Ваш взгляд, стихотворение с точки зрения периодичности ритма.

**тема для эссе**

Рассмотрите, как удается избежать унылой периодичности в дизайне знаменитых лестниц и оград.

**графическое задание**

Изобразите несколько однотипных орнаментов с разной степенью периодичности. Какой из них Вы считаете наиболее красивым?

7.

**задача**

Частица делает скачки длиной в 1 сантиметр. После каждого скачка она меняет направление движения случайным образом. Найдите с помощью вычислений или экспериментально, на какое в среднем расстояние она удалится от точки начала движения за 25 шагов, за 36 шагов, за 49 шагов.

**тема для эссе**

Сравните блуждания различных литературных героев (например, сумрачный лес у Данте, Хэмптон-Кортский лабиринт у Джерома).

**графическое задание**

Изобразите на основе случайной траектории некоторый узнаваемый предмет или существо.

8.

**задача**

Найдите информацию, заключенную в 4-х ответах на вопросы, предполагающие ответы "Да" и "Нет". Причем, во всех вопросах вероятность ответа "Да" вдвое больше вероятности ответа "Нет".

**задача**

Рассмотрим два одинаковых теплоизолированных сосуда с поршнями (рис. 5). В левом поршень опускается медленно, а в правом резко. После колебаний в обоих сосудах установится равновесное состояние. В каком из них поршень окажется на большей высоте?

**тема для эссе**

Дайте определение температуры и энтропии с точки зрения различных персонажей и исторических личностей.

**графическое задание**

Изобразите какой-нибудь природный объект (например, цветок, дерево или пейзаж), состоящий из нескольких частей. Затем изобразите эти части предмета (а) уложенными в идеальном порядке, (б) разбросанными по листу в состоянии максимального хаоса. Получилось смешно или жутковато?

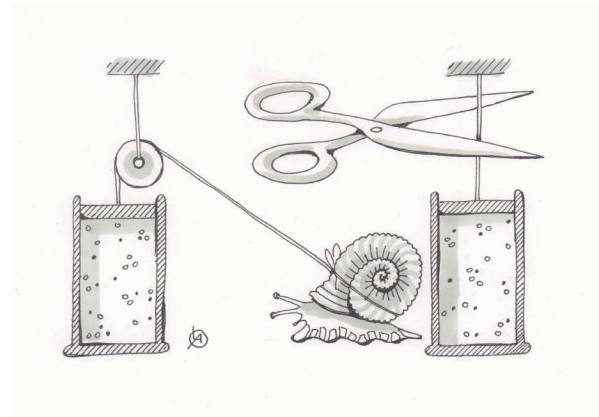


Рис. 5: Быстрый и медленный процессы

9.

**задача**

Преобразование пекаря состоит из однородного сжатия квадрата в 2 раза в вертикальном направлении и растяжения в горизонтальном. Далее правую половину следует отрезать и положить на левую. Так поступает пекарь, чтобы сделать слоеное тесто. Для этого преобразования найдите показатель Ляпунова.

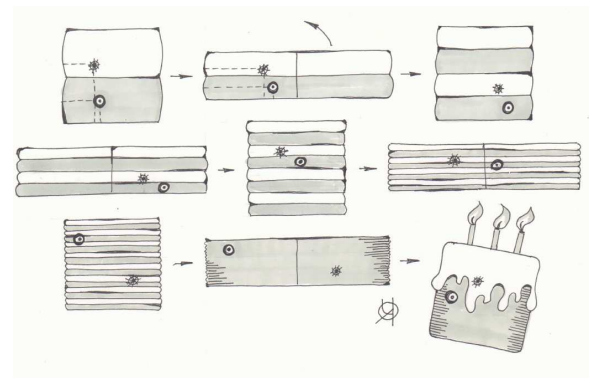


Рис. 6: Отображение двух точек

$$x_{n+1} = 2x_n, \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n \quad \text{при } 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$$

$$x_{n+1} = 2x_n - 1, \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2} \quad \text{при } \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$$

**задача**

Посчитайте число степеней свободы человека для рисования, которого можно изгибать во всех "суставах".

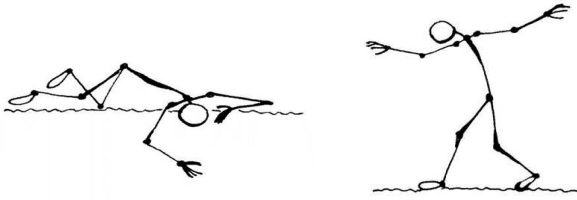


Рис. 7: Деревянный манекен для рисования

### тема для эссе

Приведите примеры мелочей, определивших развитие приключенческого сюжета или хода истории.

### графическое задание

Изобразите природные объекты, в основе которых ветвящиеся структуры.

10.

### задача

Рассмотрим движение частицы в двумерном хаотическом бильярде площадью  $\Omega$ . Оно будет описываться двумя координатами положения частицы и углом направления скорости движения частицы. Модуль скорости  $v$  не меняется. Фазовое пространство будет трехмерным, например, для бильярда Синая вот таким (рис. 8). То есть площадь самого бильярда и еще третье измерение, где откладывается угол. Причем траектории в

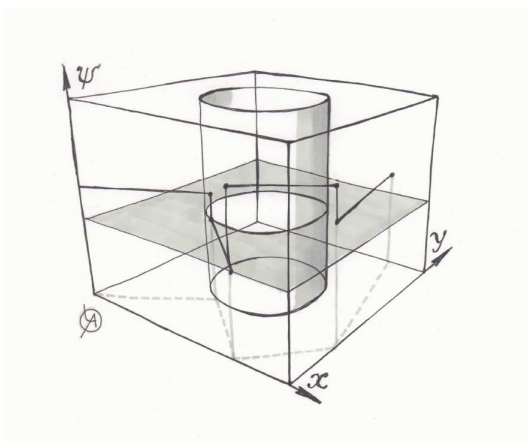


Рис. 8: Фазовое пространство Бильярда Синая

этом пространстве лежат в горизонтальных

плоскостях, соответствующих углу направления скорости. При соударении со стенкой угол меняется, траектория переходит в другую плоскость. Докажите, что если скорость постоянна, то распределение в фазовом пространстве имеет вид

$$(\Omega 2\pi)^{-1}.$$

### тема для эссе

Напишите диалог двух шариков в бильярде с рассеивающей границей, стартующих с близкими начальными условиями.

### графическое задание

Изобразите предмет, в основе дизайна которого лежит траектория частицы в бильярде.

11.

### задача

Рассмотрим флуктуации поршня массой  $m$  и площадью  $S$  в вертикальном цилиндрическом сосуде. Над поршнем вакуум, а под ним одноатомный идеальный газ из  $N$  частиц, поддерживаемый при температуре  $T$ . Вверх поршень подталкивают удары частиц газа, как гигантскую одномерную броуновскую частицу, а вниз на него действует сила тяжести. Вдоль вертикальной оси  $Ox$  поршень совершает случайные колебания около положения равновесия. Стохастическое дифференциальное уравнение (СДУ) для такого поршня можно записать в соответствии со вторым законом Ньютона

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - mg + pS + \xi(t).$$

Случайные силы  $\xi(t)$  характеризуются равновесным значением  $D_\xi = kT\gamma$ . Рассмотрим флуктуации поршня на временах больших времени релаксации, то есть передемпфированную систему, тогда слагаемым со второй производной можно пренебречь. Подставляем выражение для давления из уравнения Менделеева-Клапейрона  $p = NkT/(Sx)$  и получаем СДУ в стандартной форме

$$\dot{x} + \frac{mg}{\gamma} - \frac{NkT}{\gamma x} = \frac{1}{\gamma} \xi(t).$$

Докажите, что стационарное распределение флуктуаций поршня является гамма-распределением и имеет вид

$$w_{st}(x) = Cx^N \exp\left(-\frac{mgx}{kT}\right).$$

**тема для эссе**

Покажите соотношение сил порядка (культурный герой) и хаоса (трикстер) в мифах. (Например, Аполлон и Дионис; Тор и Локи)

12.

**задача**

Запишите СДУ для бистабильной системы под воздействием гармонического возмущения. А именно, для броуновской частицы, находящейся в поле с потенциальной энергией

$$V = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4.$$

**тема для эссе**

Расположите известные Вам архитектурные стили в порядке возрастания разброса основных размеров и пропорций и, соответственно, уменьшения строгости канонов. Есть ли тут эффект стохастического резонанса, то есть некоторого оптимального уровня случайности?

**тема для эссе**

Разберите следующие пары зарифмованных слов на три группы, соответствующие трем поэтам: Симеону Полоцкому — поэту XVII в., Николаю Гумилеву — поэту Серебряного века Русской поэзии, и Ренате Мухе, писавшей смешные стихи для современных детей. Основной подсказкой будет степень случайности, спонтанности этих рифм, которая нарастала со временем.

1. Этаже — уже
2. Упрямый — дамы
3. Жити — быти
4. Белою — делаю
5. Арктической — практически
6. Родителю — благодетелю

7. Бежит она — неожиданно
8. Кровавой — право
9. Старости — юности
10. Гонимый — держимый
11. Тонкий — гипопотомки
12. Соблазна — крестообразно
13. Насмерть — насморк
14. Плененный — замкненный
15. Вдохнуть — грудь.

**графическое задание**

Общая идея стохастического резонанса, что для любого процесса самоорганизации нужен некоторый оптимальный уровень шумов, подтверждается множеством примеров. Более того, понятия красоты и естественности в искусстве тоже предполагают некоторую вполне определенную порцию спонтанности. Например, изображение аиста будет выглядеть странно, если оно почти лишено случайных элементов, и в том случае, если их слишком много. Изобразите один и тот же портрет или предмет несколько раз: с большим количеством мелких случайных деталей и отклонений от симметрии, совсем без них, и промежуточные состояния. Какое изображение Вам больше нравится?

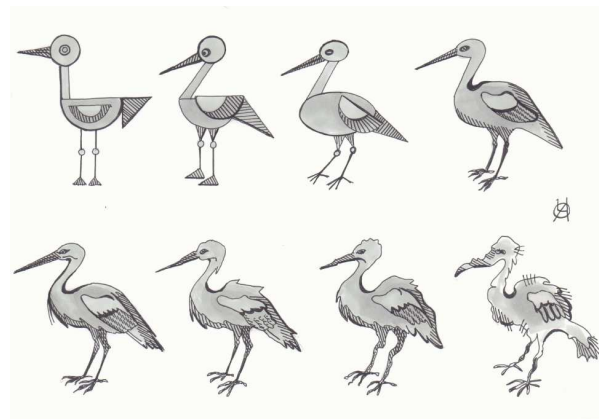


Рис. 9: Сочетание случайности и закономерности

13.

**задача**

Из двух формул одна описывает стопку экзаменационных билетов, а вторая игральную кость

$$S = k \ln 6, \quad \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{f(t_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{f(t)}{f(t_0)} = \ln 2.$$

Определите, какая что описывает, и что это за величины.

#### задача

Шулерский кубик массой  $m$  и стороной  $a$  со смещенным на  $\varepsilon$  центром масс поместили в сосуд, который трясут с энергией  $E$ . Он выпадает то одной, то другой стороной. Найдите вероятности выпадения каждой грани.

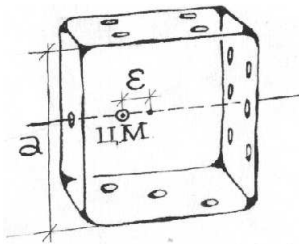


Рис. 10: Кубик со смещенным центром масс

#### тема для эссе

Предложите новый способ генерации случайных чисел и докажите его преимущества перед существующими.

#### тема для эссе

Опишите, каким, на Ваш взгляд, было влияние азартных игр на дворянское общество в XIX веке?

14.

#### задача

Активные броуновские частицы движутся с постоянными скоростями и ударяются в стенки сосуда. Докажите, что распределение углов падения частиц будет

$$w(x) = \frac{1}{2} \cos(\varphi).$$

#### тема для эссе

Возьмите короткий, хорошо известный текст (например, "Наша Таня громко плачет...") и добавьте в него много случайных деталей. Что произошло с текстом?

#### тема для эссе

Поразмышляйте над соотношением понятий "оригинальность" и "случайность" на примерах работ современных архитекторов и дизайнеров (Фриденсрайх Хундертвассер, Ренцо Пиано, Антуан Прекок)

#### тема для эссе

Сравните эти два стихотворения Ахматовой и Маяковского. Может ли у них быть что-то общее?

Мне ни к чему одические рати

И прелесть элегических затей.

По мне, в стихах все быть должно некстати,

Не так, как у людей.

Когда б вы знали, из какого сора

Растут стихи, не ведая стыда,

Как желтый одуванчик у забора,

Как лопухи и лебеда.

Сердитый окрик, дегтя запах свежий,

Таинственная плесень на стене...

И стих уже звучит, задорен, нежен,

На радость вам и мне.

.

\*\*\*\*\*

Поэзия — та же добыча радия.

В грамм добыча, в год труды.

Изводишь единого слова ради

тысячи тонн словесной руды.

Но как испепеляюще слов этих жжение

рядом с тлением слова-сырца.

Эти слова приводят в движение

тысячи лет миллионов сердца.

#### графическое задание

Рассмотрите превращение геометрических фигур в животных в работах Эшера. Предположив, что реалистичное изображение соответствует оптимальному количеству случайных деталей, попробуйте продолжить этот ряд, изобразив этих же животных с чрезмерно большим количеством случайных отклонений, так, чтобы они в результате совсем затерялись в хаосе случайных линий.