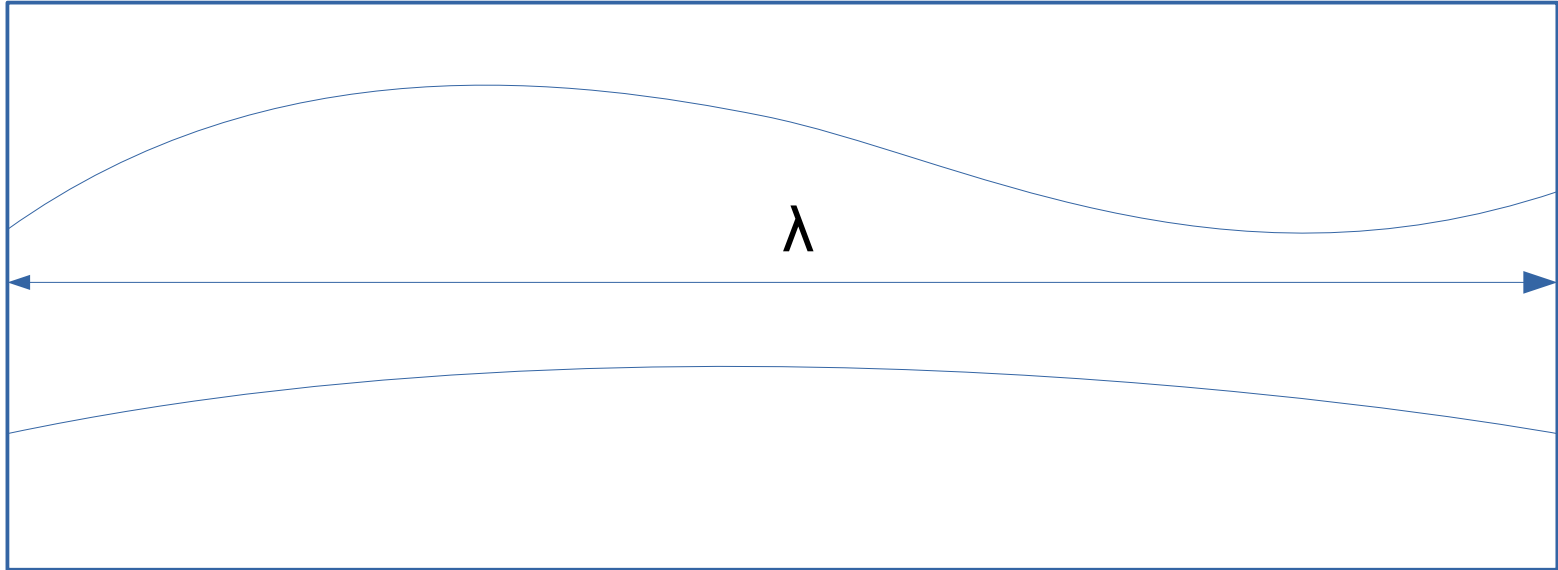


Размерное квантование. Двумерные структуры.

Основная идея базируется на основе волновых свойств электрона

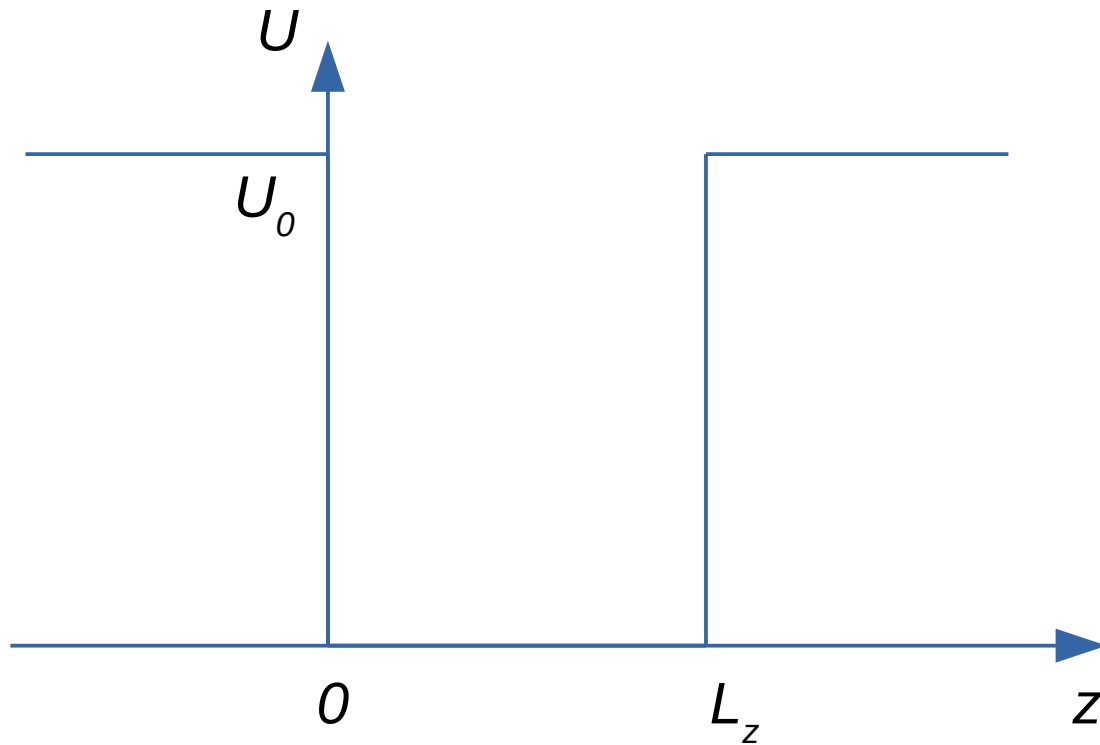
Ограничение размера требует размещения целого числа полуволен в пределах структуры.



В результате поступательное движение в направлении ограничения размеров невозможно, но возможно в перпендикулярных направлениях, т. е. в плоскости (двумерность)

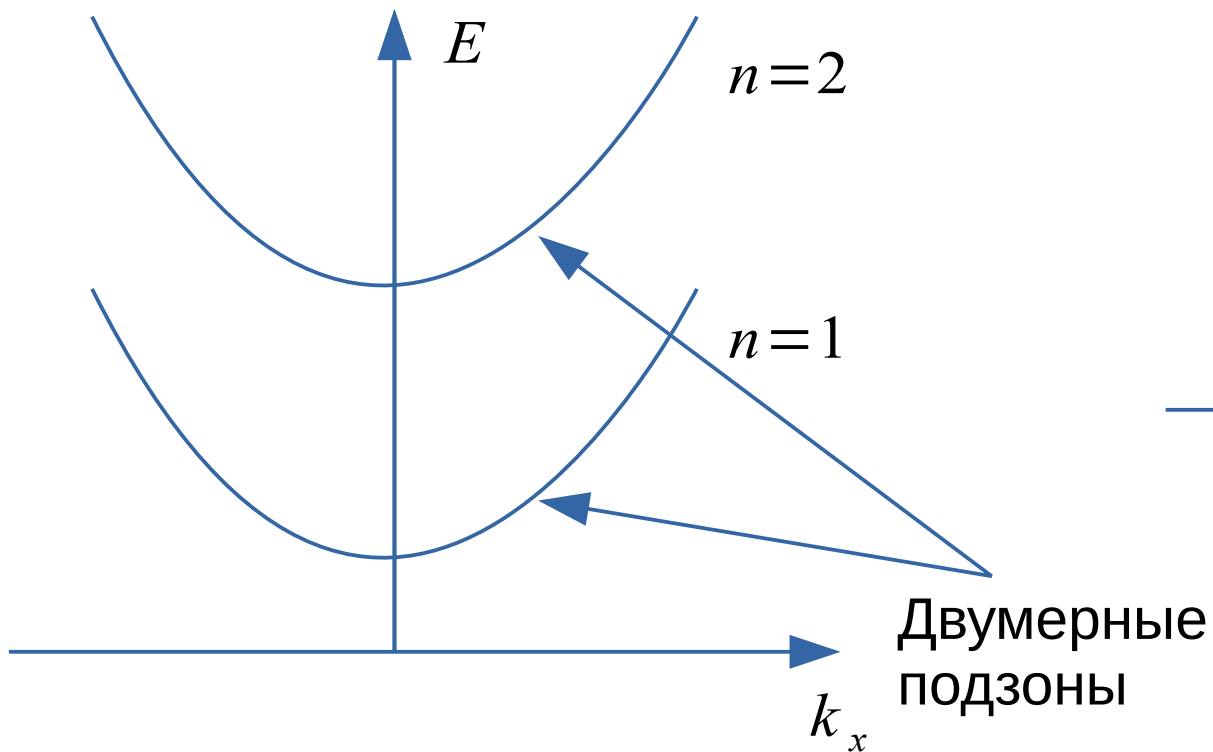
Модель потенциального ящика с бесконечными стенками.

$$U(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq L_z \\ U_0 \rightarrow \infty, & z < 0, z > L_z \end{cases}$$



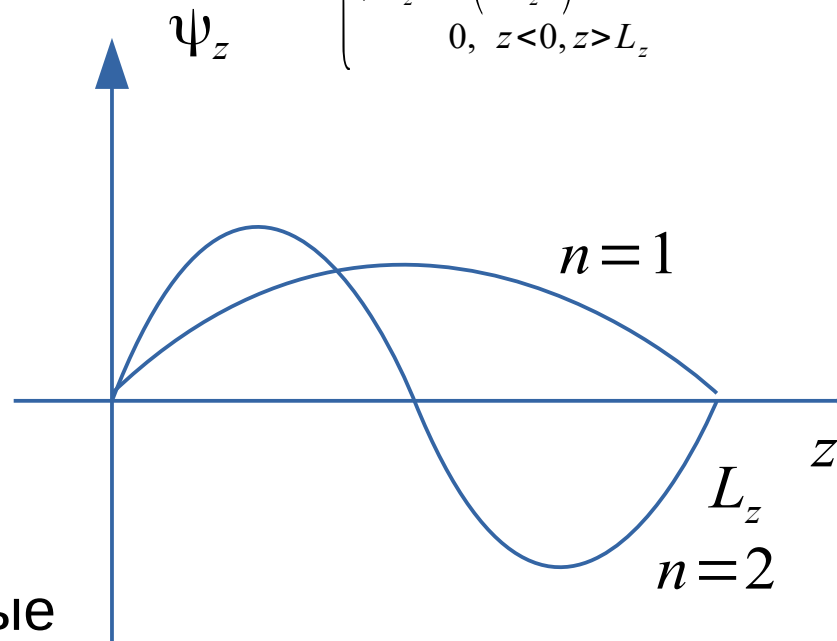
Модель потенциального ящика с бесконечными стенками. Волновые функции и энергетический спектр.

$$E = \frac{\hbar^2}{2m_e} (k_x^2 + k_y^2) + \frac{\pi^2 \hbar^2 n^2}{2m_e L_z^2}, \quad n=1, 2, 3 \dots$$



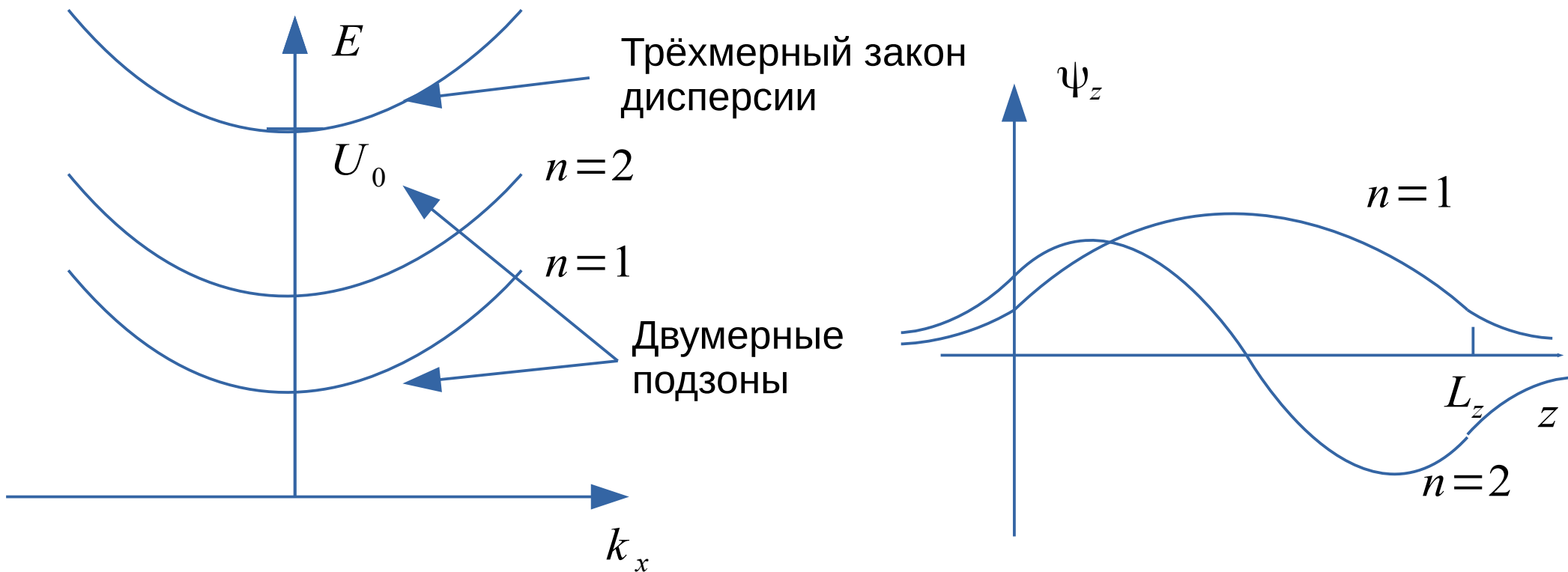
$$\psi(x, y, z) = \exp(i(k_x x + k_y y)) \psi_z(z)$$

$$\psi_z = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L_z}} \sin\left(\frac{\pi n z}{L_z}\right), & 0 \leq z \leq L_z \\ 0, & z < 0, z > L_z \end{cases}$$



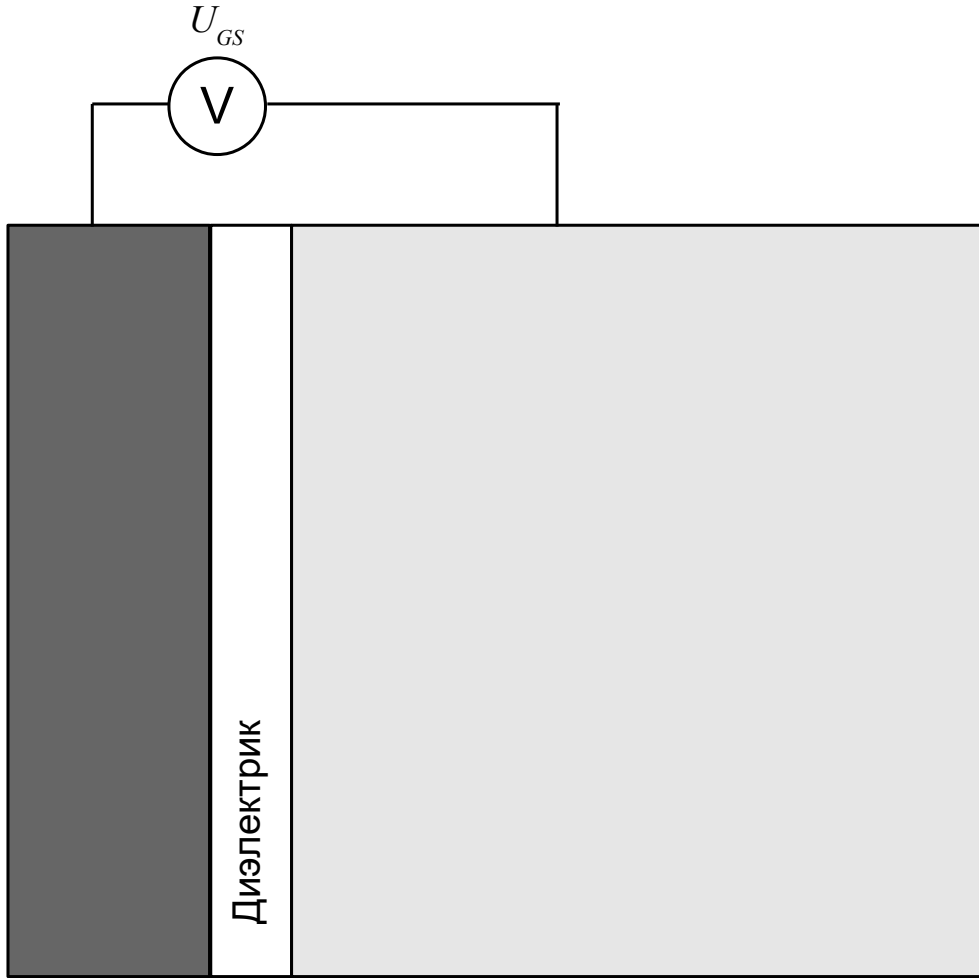
Целое число полувольт в структуре

Модель потенциального ящика с конечными стенками



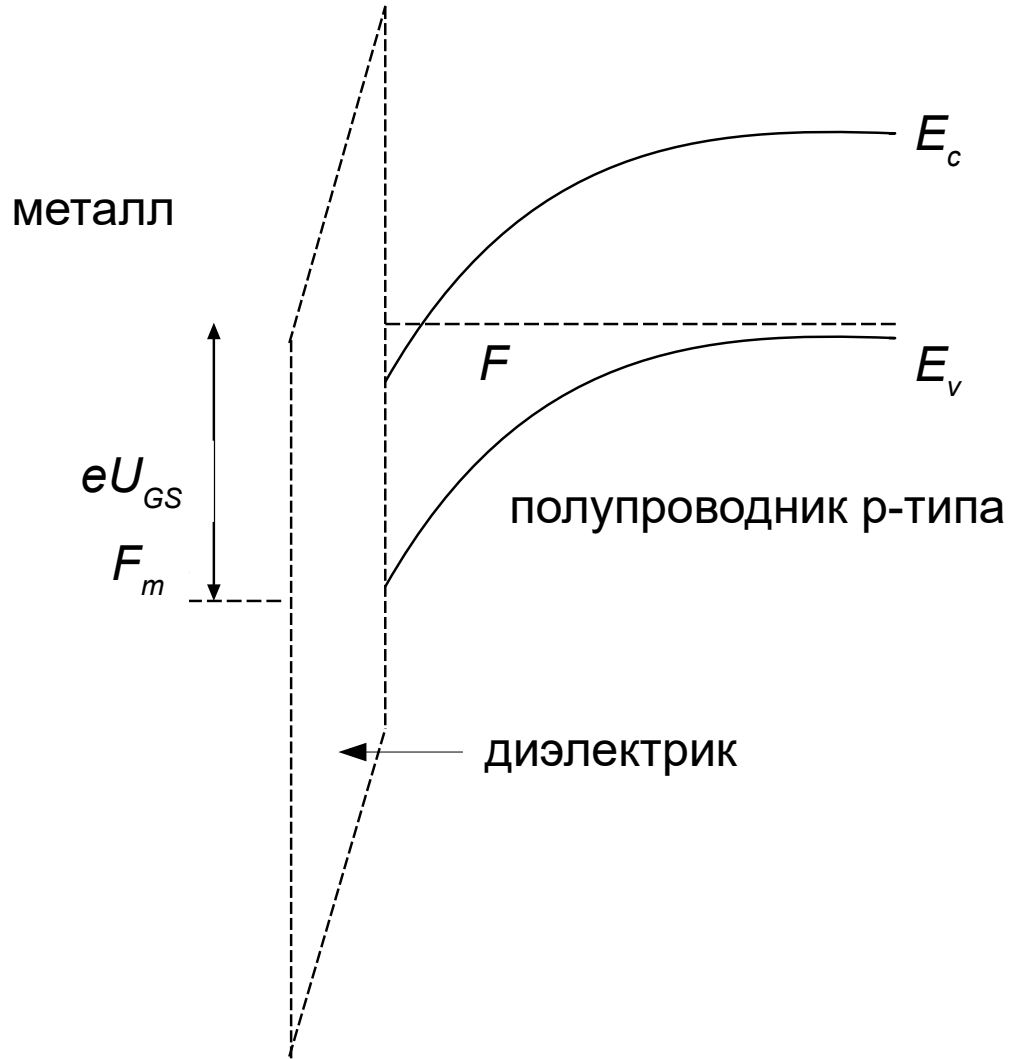
В потенциальном ящике со стенками конечной высоты образуется конечное число двумерных подзон. Состояния с энергией более высоты стенок трёхмерные. Волновые функции двумерных состояний частично проникают в стенки ящика

Примеры двумерных структур. Структура металл-диэлектрик полупроводник.

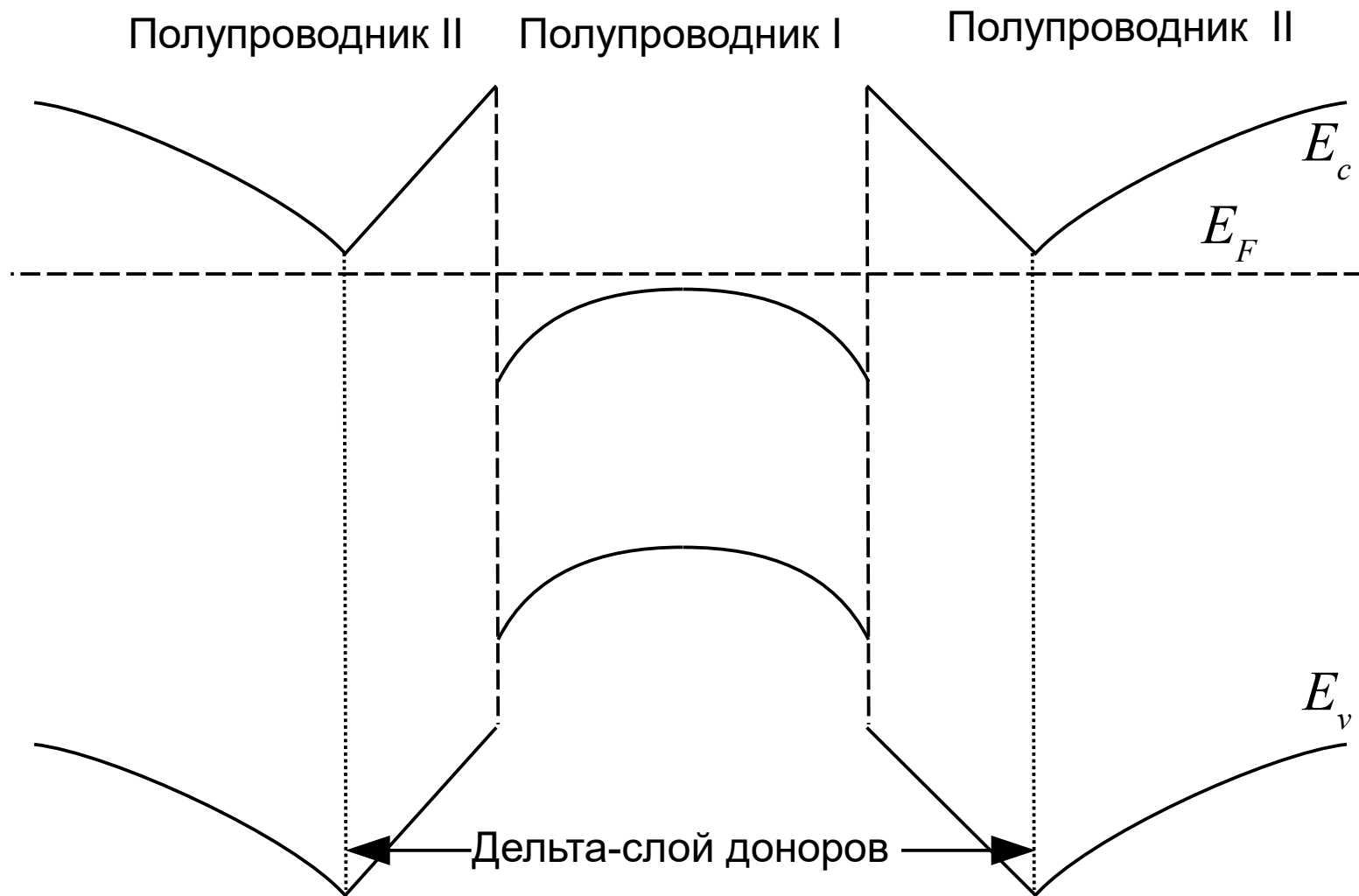


Металл
 F_m

Полупроводник F, E_c, E_v



Примеры двумерных структур. Дельта-легированная квантовая яма.



Волновые функции и энергетический спектр электронов в реальных двумерных структурах.

Волновые функции двумерных состояний сосредоточены внутри потенциальной ямы для электронов (дырок)

В двумерной структуре образуется конечное число двумерных подзон.

При энергии выше потенциального барьера, ограничивающего потенциальную яму существуют трёхмерные состояния

При наличии потенциальной ямы для дырок образуются двумерные подзоны для дырок

Закон дисперсии вблизи минимума двумерной подзоны квадратичный, но может быть анизотропным при анизотропии материала структуры

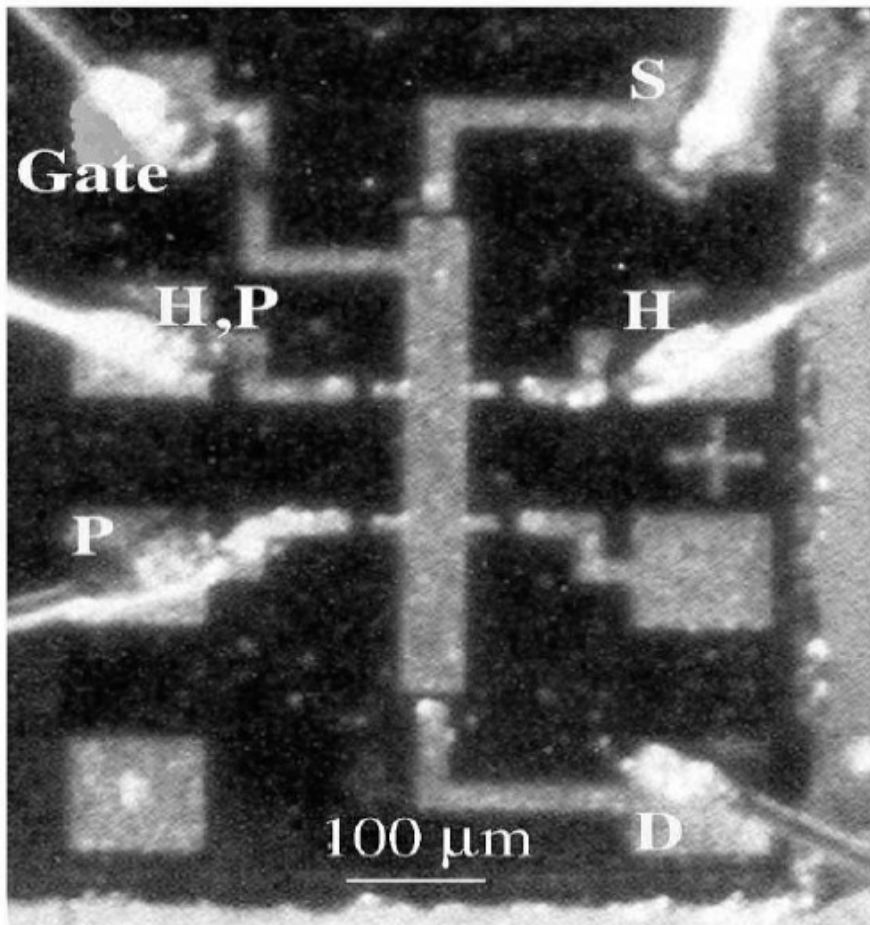
$$E = E_n + \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{k_x^2}{m_{xx}} + \frac{k_y^2}{m_{yy}} \right), \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

При наличии двух типов носителей (например лёгкие и тяжёлые дырки) образуется набор двумерных подзон для носителей каждого типа

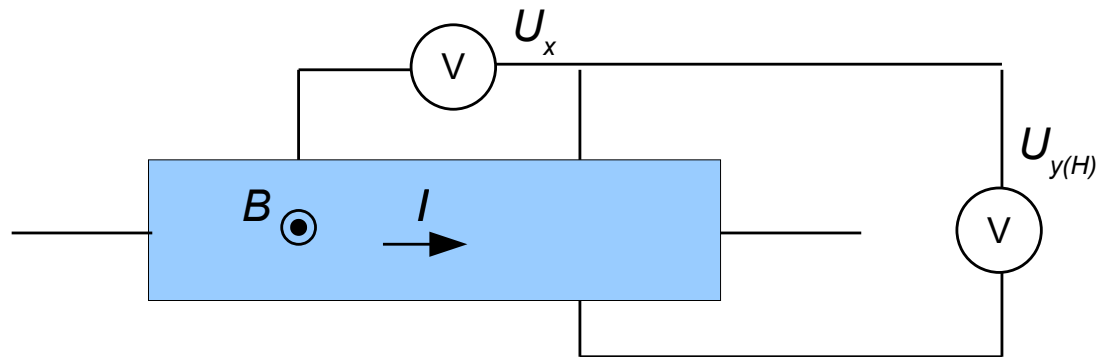
Квантовый эффект Холла. МДП структура для эксперимента.

Затвор

Исток

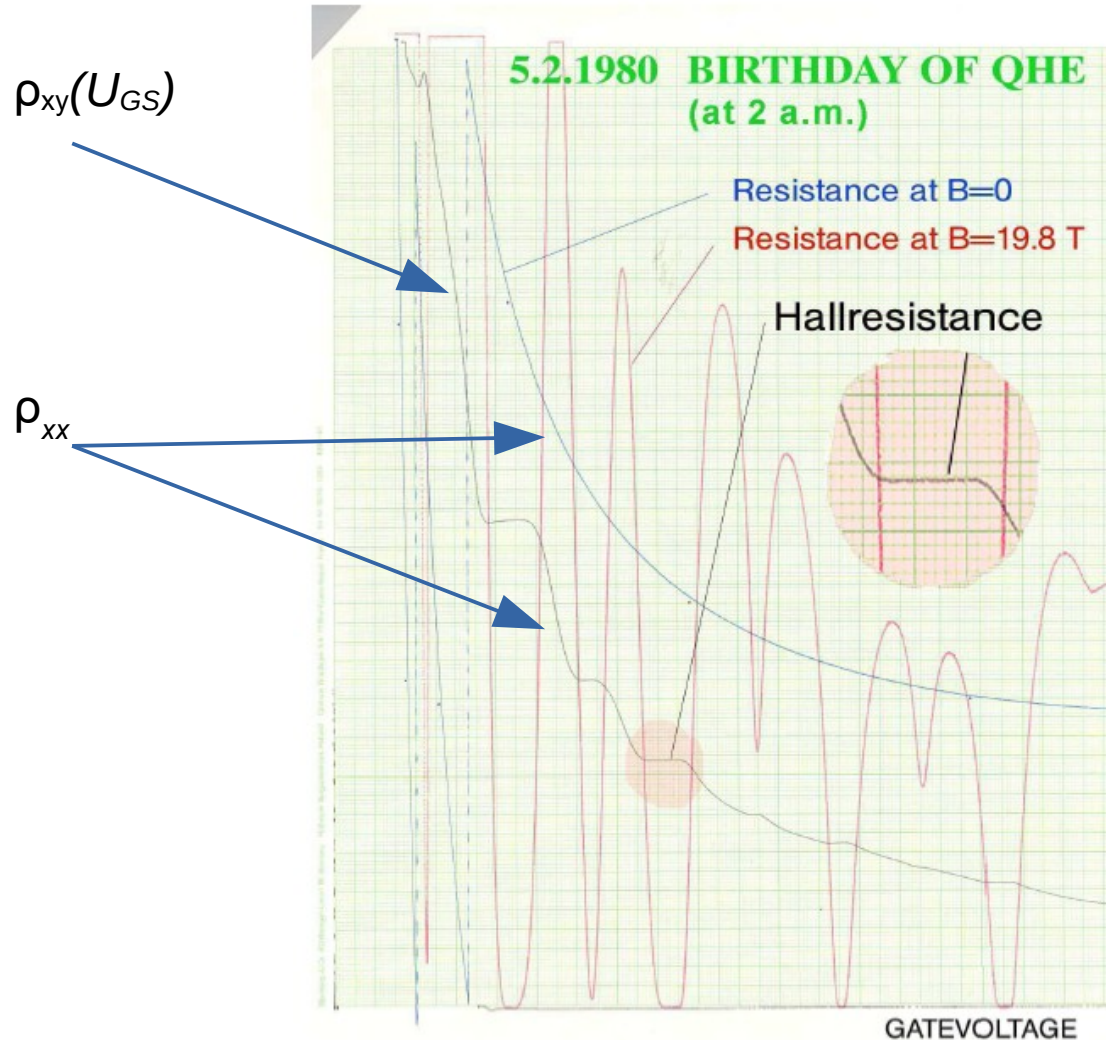


Сток



$$\rho = \begin{cases} \rho_{xx} = (U_x / I)(w/l) & \rho_{xy} = -U_{y(H)} / I \\ \rho_{yx} = U_{y(H)} / I & \rho_{yy} = (U_y / I)(w/l) \end{cases}$$

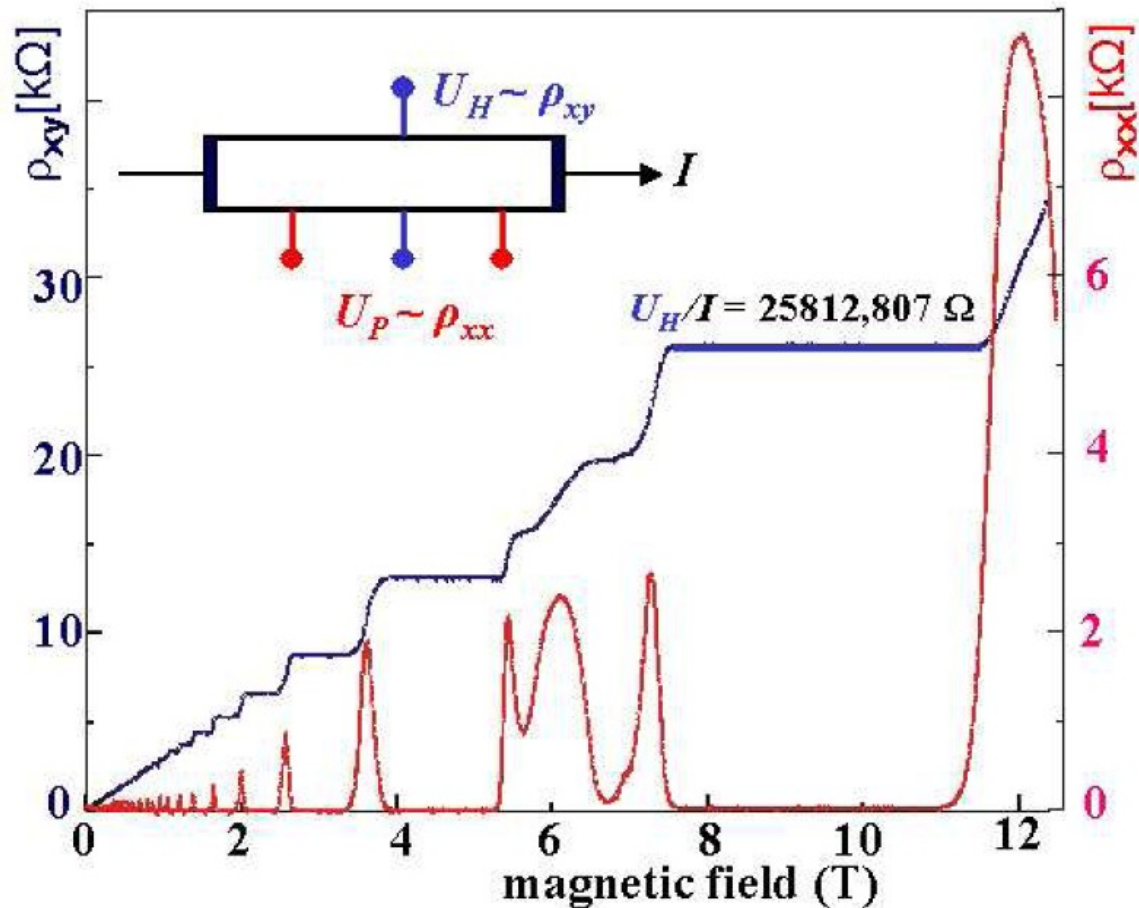
Квантовый эффект Холла на МДП структуре. Экспериментальные зависимости.



При увеличении напряжения исток-затвор увеличивается концентрация двумерных электронов в структуре.

ρ_{xx} – осциллирует в зависимости от напряжения исток-затвор. В области где ρ_{xx} близко к 0 $\rho_{yx(H)}$ слабо зависит от напряжения (область плато)

Квантовый эффект Холла на гетеропереходе с высокой подвижностью электронов



Значение на плато $\rho_{yx(H)}$:

$$\rho_{yx(H)} = \frac{2\pi\hbar}{e^2\nu}, \nu = 1, 2, \dots$$

ρ_{xx} – осциллирует в зависимости от напряжения исток-затвор. В области где ρ_{xx} близко к 0 $\rho_{yx(H)}$ слабо зависит от напряжения (область плато). Значение на плато выражается через постоянную Планка и элементарный заряд

Уравнение Шредингера для электрона в магнитном поле в двумерной структуре

Обобщённый импульс (квазиимпульс) в магнитном поле

$$\hat{\vec{p}} \rightarrow \hat{\vec{p}} + e \vec{A}$$

Векторный потенциал (выбирается для прямоугольной структуры)

$$\vec{A} = (-By, 0, 0)$$

Оператор Гамильтона

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \left(\hat{\vec{p}} + e \vec{A} \right)^2 = \frac{1}{2m_e} \left[\left(\hat{p}_x - eBy \right)^2 + \hat{p}_y^2 \right]$$

Уравнение Шредингера

$$\hat{H} \psi = E \psi \quad (E = E - E_l)$$

Решение уравнение Шредингера

Волновая функция

$$\psi = \exp(i k_x x) P_n \left(\frac{y - k_x l_B^2}{l_B} \right) \exp \left[-\frac{(y - k_x l_B^2)^2}{2 l_B^2} \right] \quad l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{e B}}$$

Энергия (уровни Ландау)

$$E = E_{nL} = \hbar \frac{e B}{m_e} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad N_B = \frac{e B}{2 \pi \hbar} = \frac{1}{2 \pi l_B^2} \quad \nu = \frac{n_{2D}}{N_B}$$

При учёте спина электрона к оператору Гамильтона добавляется слагаемое $-g \mu_B \hat{B} \hat{s}$

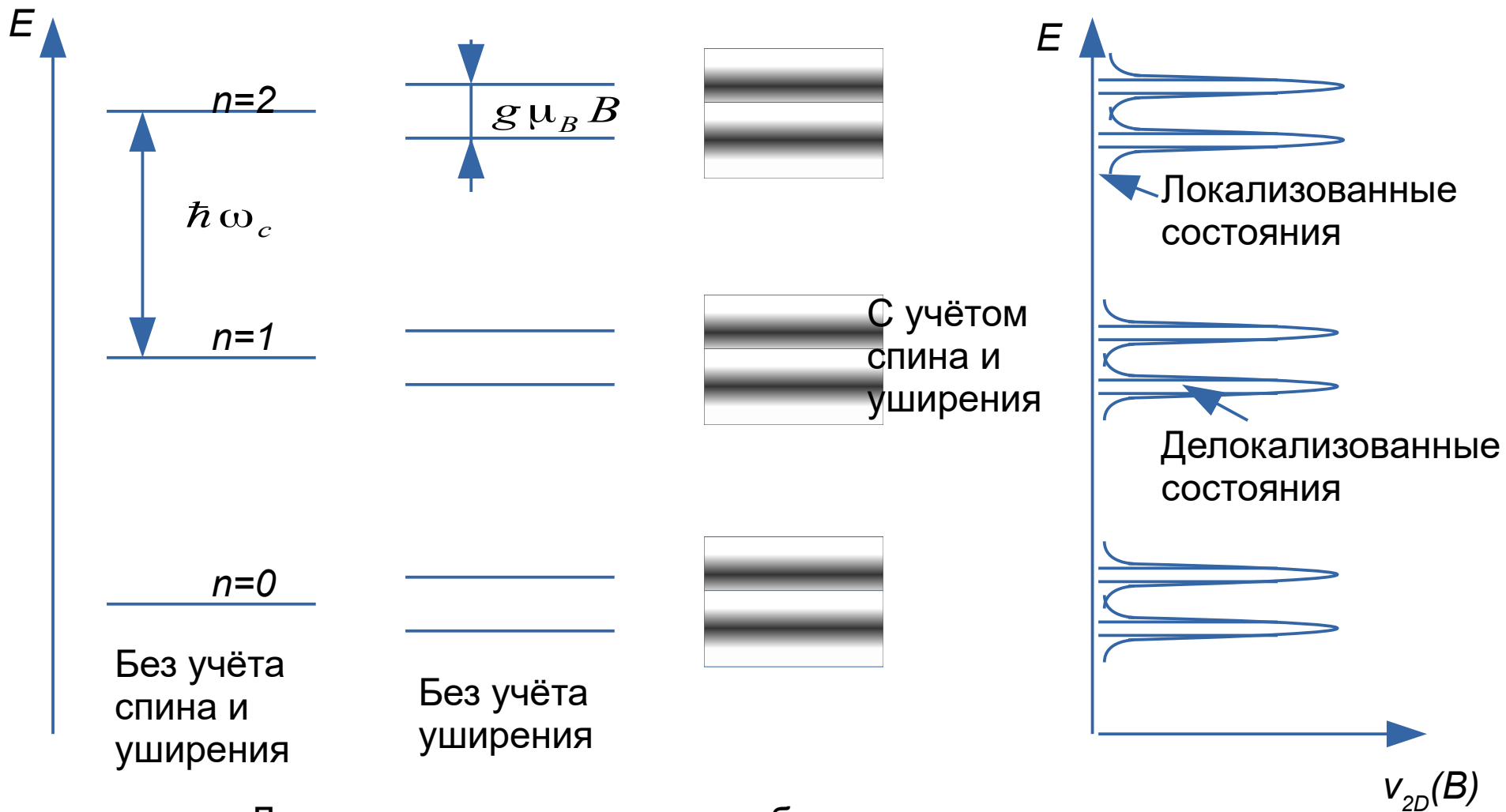
Энергия с учётом спина

$$E = E_{nL} = \hbar \frac{e B}{m_e} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} g \mu_B B \quad \mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_0}$$

g - фактор Ланде

m_0 - масса свободного электрона

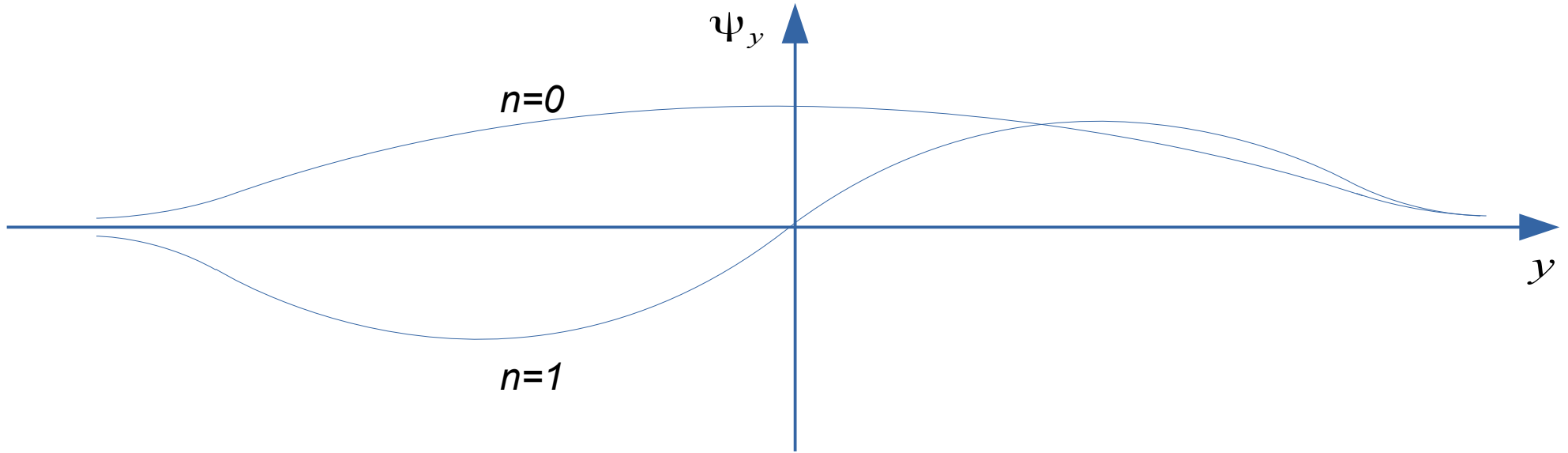
Энергетический спектр электронов в магнитном поле



Из-за спина уровни Ландау расщепляются, из-за беспорядка уширяются

Свойства волновой функция электрона

Зависимость волновой функции от y



Центр волновой функции в направлении y

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_y(y)|^2 y dy = k_x l_B^2$$

Плотность потока вероятности

Вывод уравнения непрерывности

Уравнение Шредингера и сопряжённое ему домножаем на волновую функцию и комплексносопряжённую

$$\psi^* \times \quad i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2 m_e} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{2 i \hbar e B y}{2 m_e} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{e^2 B^2 y^2}{2 m_e} \psi$$

$$\psi \times \quad -i \hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2 m_e} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} \right) + \frac{2 i \hbar e B y}{2 m_e} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \frac{e^2 B^2 y^2}{2 m_e} \psi^*$$

После почленного сложения

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = -\frac{\hbar}{2 m_e i} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right) \right] - \frac{e B y}{2 m_e} \frac{\partial}{\partial x} |\psi|^2$$

Сравниваем с общим видом уравнения непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = -\frac{\partial i_x}{\partial x} - \frac{\partial i_y}{\partial y}$$

Получаем для компонент плотности потока вероятности

$$i_x = \frac{\hbar}{2 m_e i} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) - \frac{e B y}{2 m_e} |\psi|^2 = \frac{\hbar k_x}{2 m_e} |\psi_y|^2 - \frac{e B y}{2 m_e} |\psi_y|^2 \quad i_y = 0$$

Плотность потока и сила электрического тока

Для одного состояния сила тока

$$I_1 = -e \int_{-\infty}^{\infty} i_x(y) dy$$

Полная сила тока

$$I(B) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(E) v_{2D}(B) f(E) dE$$

Подставляем полученную волновую функцию

$$I_1 = -\frac{e^2 B}{2m_e} \left(k_x l_B^2 - \int_{-\infty}^{\infty} y |\psi(y)|^2 dy \right) = 0$$

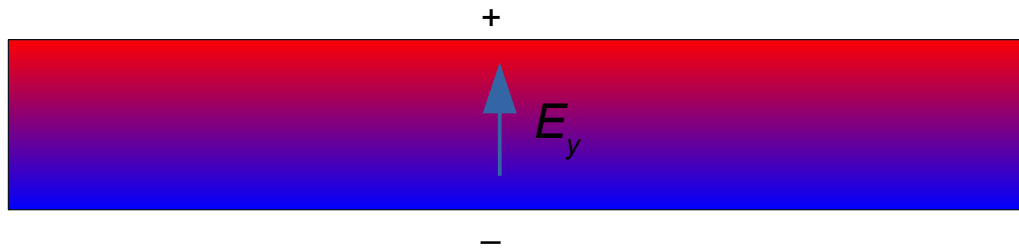
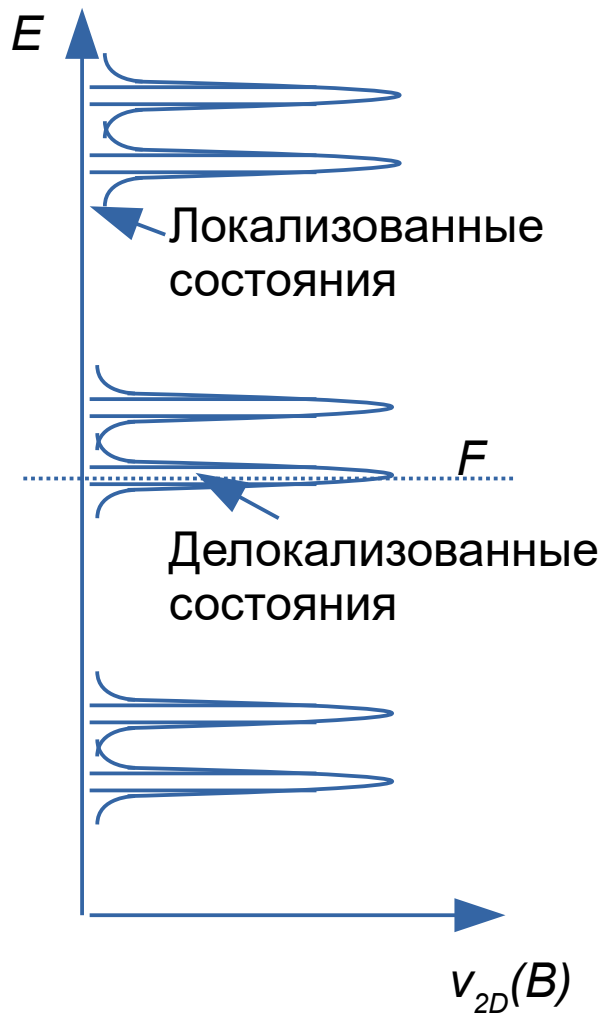
Как переносится ток в магнитном поле?

При $T \approx 0$ (КЭХ наблюдается при низкой температуре) можно выделить два случая в зависимости от расположения уровня Ферми

Уровень Ферми в области энергий делокализованных состояний

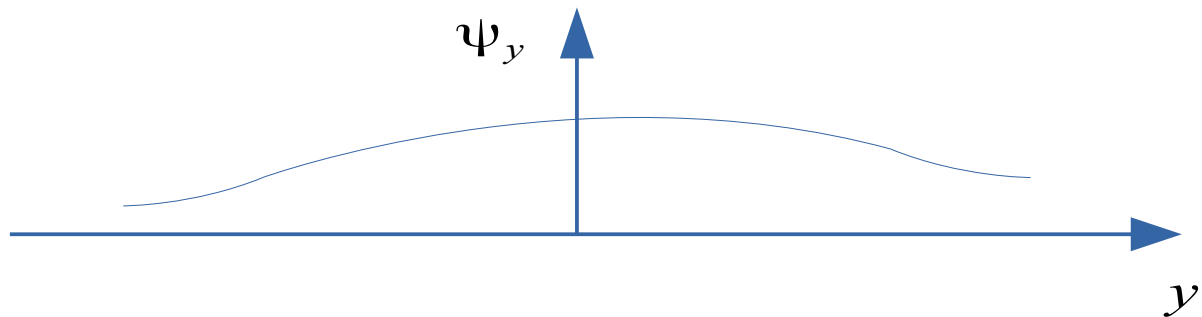
Электрическое поле E_x уменьшает k_x на $-eE_x\tau/\hbar$

В результате при меньших y состояния заполняются электронами с большей вероятностью. Нарушается электронейтральность структуры, появляется компенсирующее электрическое поле вдоль оси Y и напряжение Холла

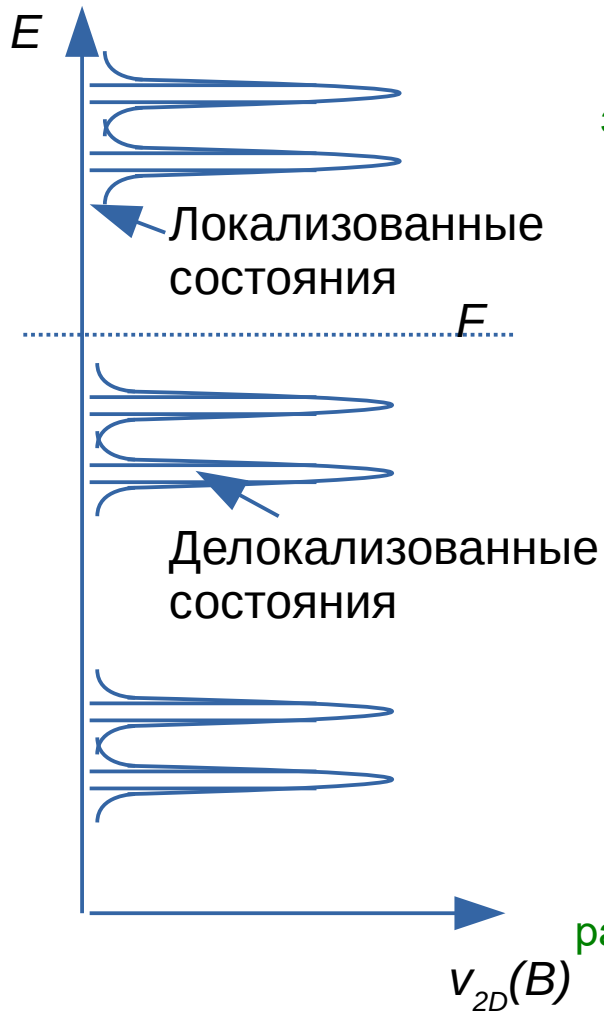


Электрическое поле E_y искажает волновую функцию, так что её центр смещается в сторону больших Y от $k_x l_B^2$.

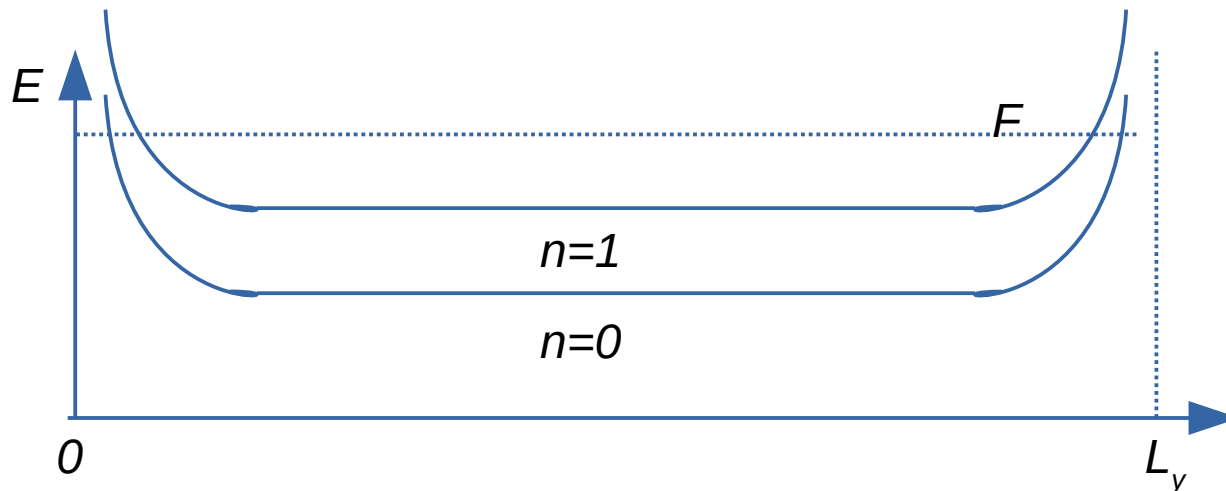
Поэтому сила тока одного состояния становится отличной от 0.



Уровень Ферми в области энергий локализованных состояний



В этом случае перераспределение электронов между делокализованными состояниями невозможно. На краях структуры потенциальная энергия электронов увеличивается. Уровни Ландау загибаются вверх и пересекают уровень Ферми. В местах пересечения образуются одномерные токнесущие состояния шириной порядка l_B



Направление движения электронов в этих состояниях задано отклонением центра волновой функции от $k_x l_B^2$. Это отклонение для противоположных краёв противоположное. Поэтому ток в одномерных каналах слева и справа течёт в разных направлениях. Кроме того рассеяние в каналах невероятно (вероятность туннелирования на другой край ничтожна)

Сила тока переносимого краевыми состояниями образованными от одного уровня Ландау ($T=0$ К).

Сила тока переносимого левым краевым состоянием ($y=0$)

$$I_+ = \frac{e}{2\pi} \int_{E_{nL}}^{F_l} v_x dk_x = \frac{e}{2\pi\hbar} \int_{E_{nL}}^{F_l} \frac{dE}{dk_x} dk_x = \frac{e}{2\pi\hbar} (F_l - E_{nL})$$

Сила тока переносимого правым краевым состоянием ($y=L_y$)

$$I_- = \frac{e}{2\pi} \int_{E_{nL}}^{F_r} v_x dk_x = \frac{e}{2\pi\hbar} \int_{E_{nL}}^{F_r} \frac{dE}{dk_x} dk_x = \frac{e}{2\pi\hbar} (F_r - E_{nL})$$

Полная сила тока

$$I = I_+ - I_- = \frac{e}{2\pi\hbar} (F_l - F_r) = \frac{e^2}{2\pi\hbar} U_H$$

В случае если в уровнях Ландау расположено ниже уровня Ферми

$$I = \frac{e^2 v}{2\pi\hbar} U_H$$

F_l, F_r — уровень Ферми с левого и правого края

Недиагональные компоненты тензора электропроводности и сопротивления. Фактор заполнения.

Компонента тензора удельного сопротивления в режиме плато

$$\rho_{xy} = - \frac{U_{y(H)}}{I} = - \frac{2\pi\hbar}{e^2\nu}$$

Компонента тензора электропроводности в режиме плато

$$\sigma_{xy} = - \frac{1}{\rho_{xy}} = \frac{e^2\nu}{2\pi\hbar}$$

Фактор заполнения

$$\nu = \frac{n_{2D}}{N_L} = \frac{n_{2D}eB}{2\pi\hbar}$$

Осцилляции ρ_{xx} в зависимости от магнитного поля и напряжения исток-затвор в МДП структуре

Время релаксации τ и плотность состояний зависят от энергии. Поэтому при поддержании постоянной силы тока напряжение вдоль оси X осциллирует при пересечении уровнем Ферми уровня Ландау. Эти осцилляции периодичны в зависимости от $1/B$

Запишем условие совпадения уровня Ферми с уровнем Ландау с номером n и $n+1$

$$F - E_l = \frac{\hbar e B_n}{m_e} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad F - E_l = \frac{\hbar e B_{n+1}}{m_e} \left(n + 1 + \frac{1}{2} \right)$$

Отсюда получаем

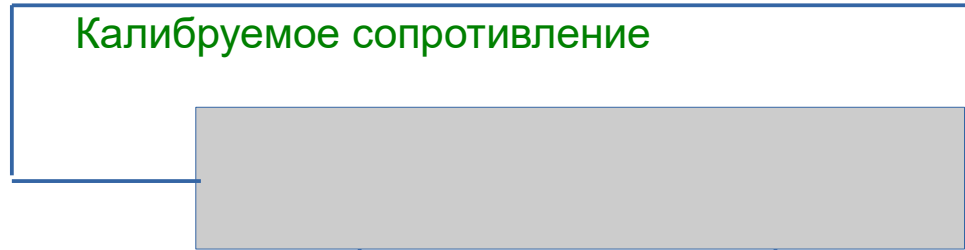
$$n + \frac{1}{2} = \frac{m_e (F - E_l)}{\hbar e B_n} \quad n + 1 + \frac{1}{2} = \frac{m_e (F - E_l)}{\hbar e B_{n+1}}$$

Вычитаем из правого левое и получаем для периода T_B и частоты F_B осцилляций от двумерной подзоны с минимумом энергии E_l .

$$T_B = \frac{1}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_n} = \frac{e\hbar}{m_e (F - E_l)} \quad F_B = \frac{1}{T_B} = \frac{m_e (F - E_l)}{e\hbar}$$

Этalon сопротивления на основе КЭХ.

Двумерная структура в режиме плато КЭХ с $\nu=1$



Достигнута относительная неопределённость воспроизведения h/e^2 менее 10^{-8}