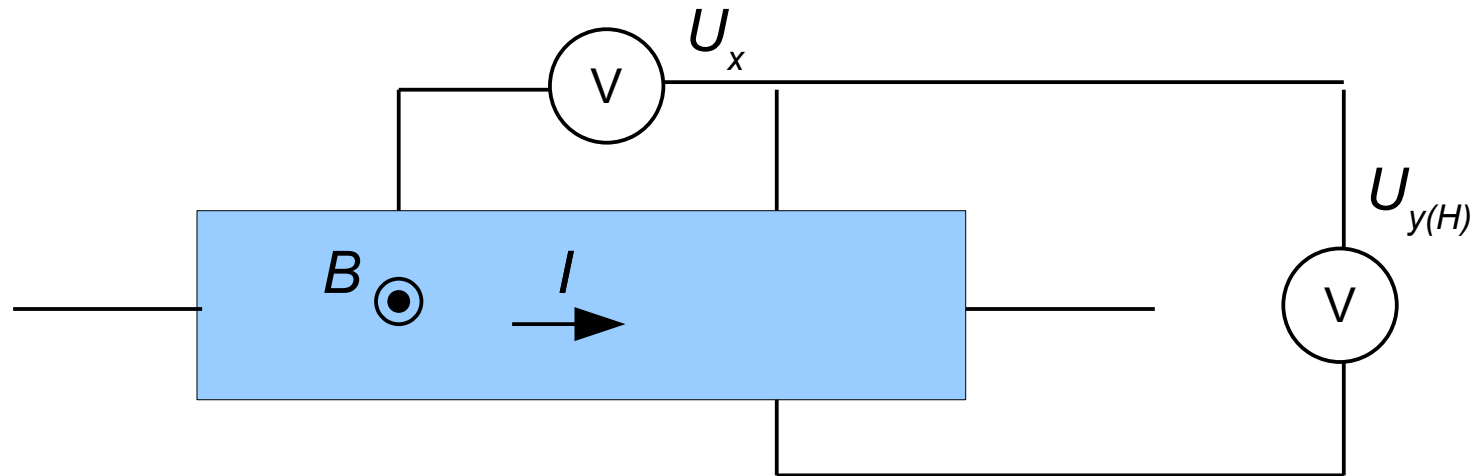


Квантовый эффект Холла (КЭХ)

Целочисленный квантовый эффект Холла (ЦКЭХ)

Вид сверху двумерной структуры в магнитном поле B . I – сила тока. U_x , $U_{y(H)}$ – продольное и поперечное (холловское) напряжение.



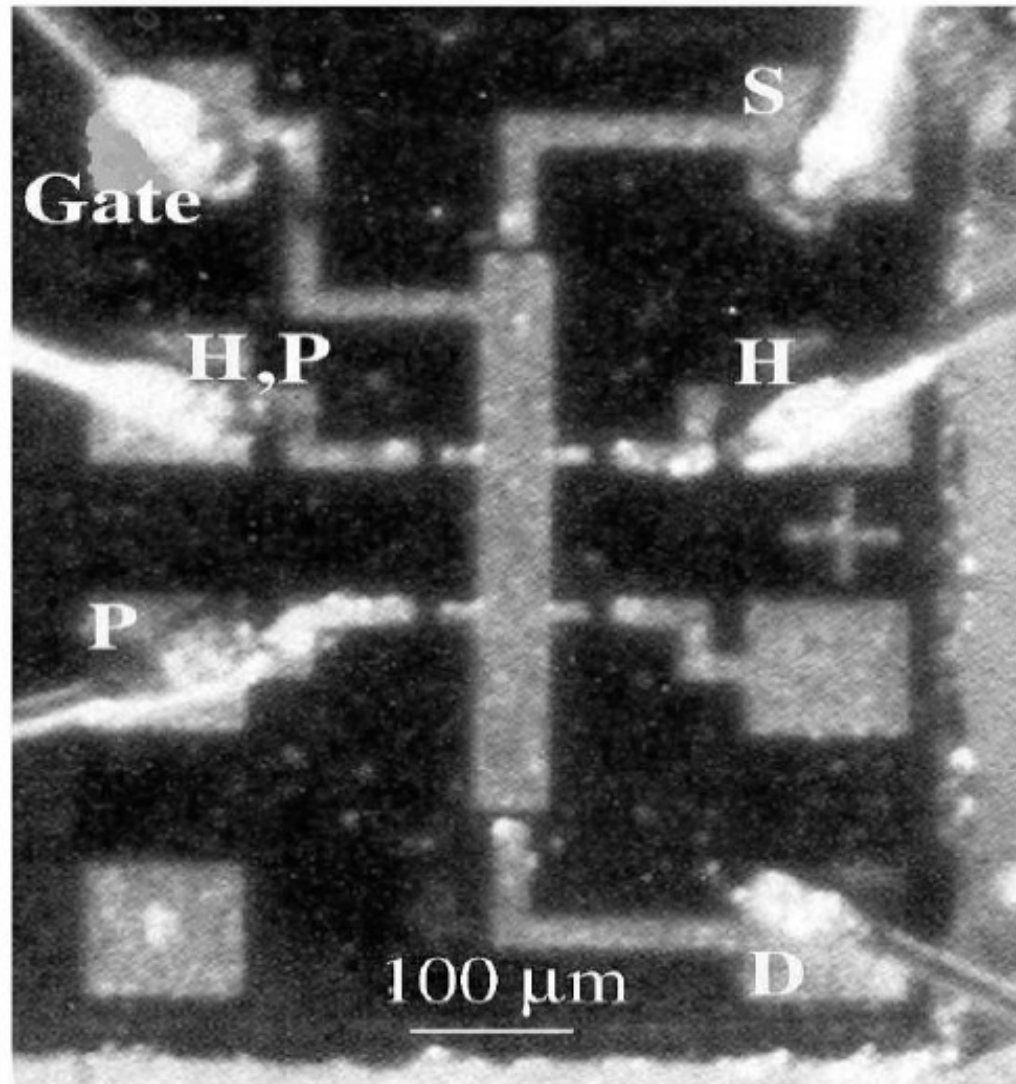
Тензоры электропроводности σ и сопротивления ρ

$$\rho = \begin{Bmatrix} \rho_{xx} = U_x / I & \rho_{xy} = -U_{y(H)} / I \\ \rho_{yx} = U_{y(H)} / I & \rho_{xx} = U_x / I \end{Bmatrix} \quad \sigma = \rho^{-1} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{xx} \end{Bmatrix}$$

Вид сверху реальной МДП структуры, выполненной при помощи фотолитографии

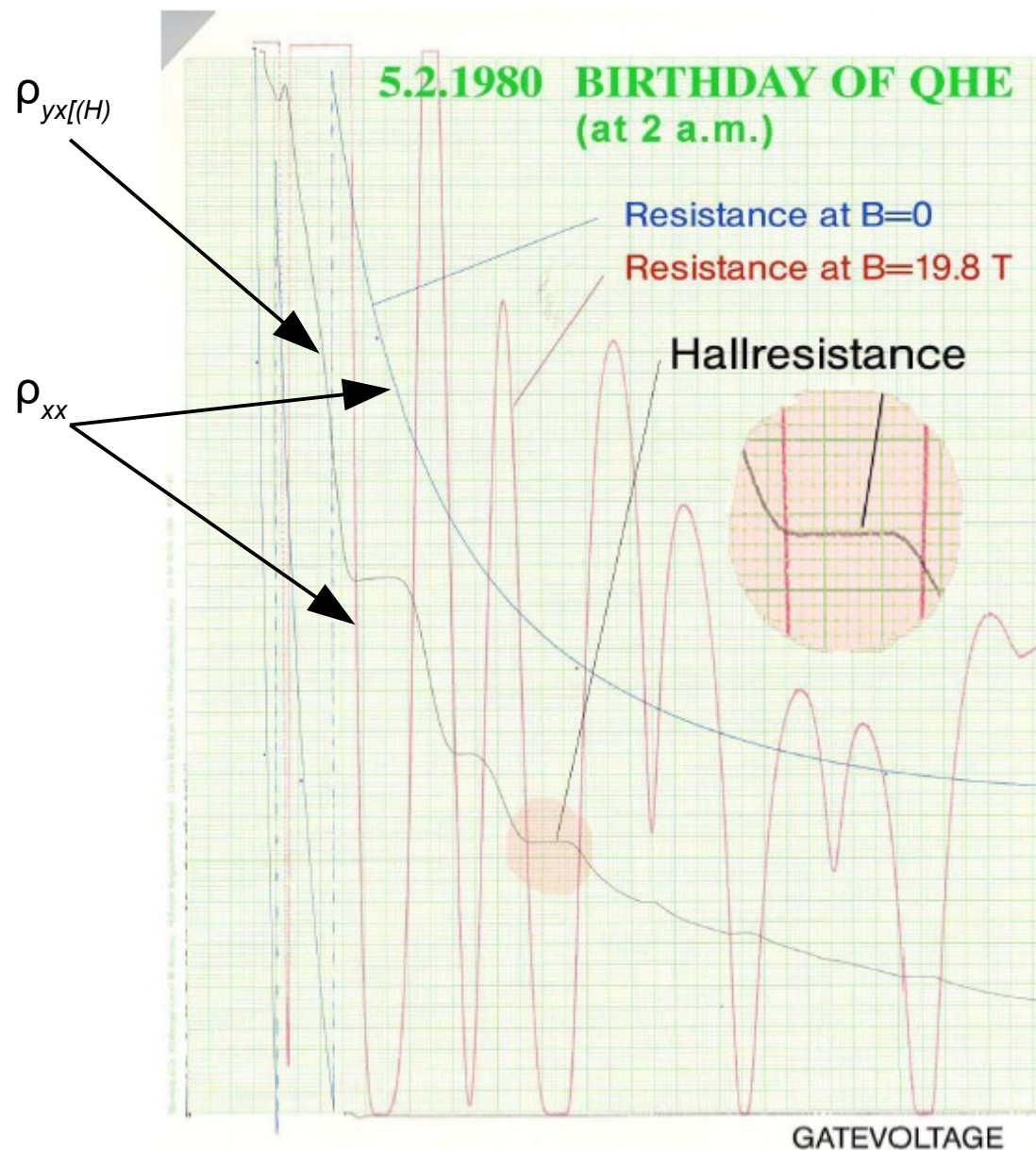
Исток

Затвор



Сток

Квантовый эффект Холла. Зависимости компонент тензора сопротивления от напряжения исток-затвор в МДП структуре в постоянном магнитном поле (из лекции К. фон Клитцинга – открывшего ЦКЭФ).

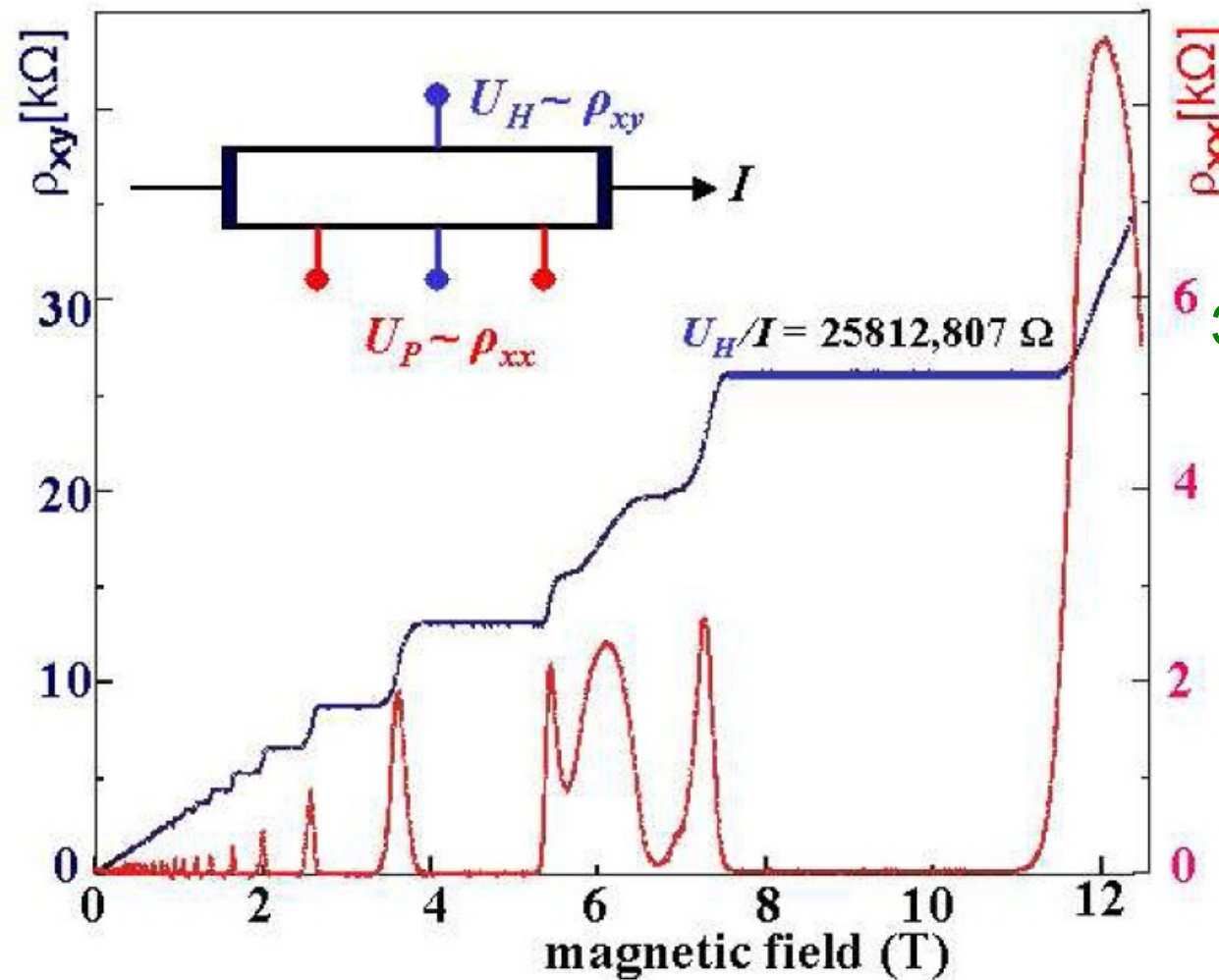


При увеличении напряжения исток-затвор увеличивается концентрация двумерных электронов в структуре.

ρ_{xx} – осциллирует в зависимости от напряжения исток-затвор. В области где ρ_{xx} близко к 0 $\rho_{yx(H)}$ слабо зависит от напряжения (область плато)

Напряжение исток-затвор

Зависимости компонент тензора сопротивления от магнитной индукции в гетеропереходе с высокой подвижностью электронов (из лекции К. фон Клитцинга)



Значение на плато $\rho_{yx(H)}$:

$$\rho_{yx(H)} = \frac{2\pi\hbar}{e^2\nu}, \nu = 1, 2, \dots$$

ρ_{xy} — осциллирует в зависимости от напряжения исток-затвор. В области где ρ_{xx} близко к 0 $\rho_{yx(H)}$ слабо зависит от напряжения (область плато).

Значение на плато выражается через постоянную Планка и элементарный заряд

Двумерный электрон в сильном магнитном поле. Квадратичный изотропный закон дисперсии. Уравнение Шредингера. Энергия отсчитывается от минимума двумерной подзоны E_l

Обобщённый импульс (квазиимпульс) в магнитном поле

$$\hat{\vec{p}} \rightarrow \hat{\vec{p}} + e \vec{A}$$

Векторный потенциал (выбирается для прямоугольной структуры)

$$\vec{A} = (-B y, 0, 0)$$

Оператор Гамильтона

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_e} \left(\hat{\vec{p}} + e \vec{A} \right)^2 = \frac{1}{2m_e} \left[\left(\hat{p}_x - e B y \right)^2 + \hat{p}_y^2 \right]$$

Уравнение Шредингера

$$\hat{H} \psi = E \psi \quad (E = E - E_l)$$

Двумерный электрон в сильном магнитном поле. Преобразование уравнения Шредингера

В уравнении нет зависимости от координаты x , поэтому волновую функцию можно представить в виде:

$$\psi(x, y) = \psi_y(y) \exp(ik_x x) \quad \hat{p}_x \psi(x, y) = \hbar k_x \psi_y(y) \exp(ik_x x)$$

В результате уравнение для ψ_y принимает вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{d^2 \psi_y}{dy^2} - \left(\frac{eBy}{\hbar} + k_x^2 \right)^2 \right) = E \psi_y$$
$$\frac{d^2 \psi_y}{dy^2} + \frac{eB}{\hbar} \left[2E \frac{m_e}{e\hbar B} - \left(y - k_x \frac{\hbar}{eB} \right)^2 \right] \psi_y = 0$$

Граничные условия для ψ_y :

$$\psi_y(y) \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \pm \infty$$

Маштабы длины и энергии

Магнитная длина $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{e B}}$

Циклотронная энергия $E = \hbar \omega_c$

Циклотронная частота $\hbar \omega_c = \frac{e B}{m_e}$

Безразмерная координата вдоль Y $\eta = \frac{y - k_x l_B^2}{l_B}$

Безразмерная энергия $G = E \frac{m_e}{e \hbar B} = \frac{E}{\hbar \omega_c}$

Безразмерное уравнение Шредингера

$$\frac{d^2 \psi_y}{d \eta^2} + (2 G - \eta^2) \psi_y = 0$$

Решение безразмерного уравнения Шредингера

Решение при $\eta \rightarrow \pm \infty$

$$\frac{d^2 \psi_y}{d \eta^2} - \eta^2 \psi_y = 0$$

Новая переменная $\beta = \eta^2$

$$\frac{d^2 \psi_y}{d \eta^2} = 4\beta \frac{d^2 \psi_y}{d \beta^2} + 2 \frac{d \psi_y}{d \beta} \rightarrow 4\beta \frac{d^2 \psi_y}{d \beta^2}, \text{ при } \beta \rightarrow \infty$$

Новое уравнение
$$\frac{d^2 \psi_y}{d \beta^2} = \frac{1}{4} \psi_y$$

Решение
$$\psi_y \rightarrow C \exp\left(-\frac{\beta}{2}\right) = C \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right), \text{ при } \beta, \eta \rightarrow \infty$$

Решение при конечных η

$$\psi_y = P_n(\eta) \exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right) \quad P_n(\eta) = \sum_{k=0}^n a_{nk} \eta^k$$

Решение безразмерного уравнения (продолжение)

Уравнение для полинома после подстановки

$$\frac{d^2 P_n}{d \eta^2} - 2 \eta \frac{d P_n}{d \eta} + (2G - 1) P_n = 0$$

Из него получаются уравнения для коэффициентов полинома

$$\begin{aligned} (k+1)(k+2)a_{n2} + (2G-1)a_{n0} &= 0, \quad k=0, \quad n \geq 2 \\ (k+1)(k+2)a_{nk+2} - 2ka_{nk} + (2G-1)a_{nk} &= 0, \quad 1 \leq k \leq n-2 \\ -2ka_{nk} + (2G-1)a_{nk} &= 0, \quad n-1 \leq k \leq n \end{aligned}$$

По условию записи $a_{nn} \neq 0$

Поэтому должно быть $-2n + 2G - 1 = 0 \quad G = n + \frac{1}{2}$

А также $a_{nn-1} = 0$

Решения уравнения в исходных переменных

Волновая функция

$$\psi = \exp(i k_x x) P_n \left(\frac{y - k_x l_B^2}{l_B} \right) \exp \left[-\frac{(y - k_x l_B^2)^2}{2 l_B^2} \right]$$

Энергия (уровни Ландау)

$$E = E_{nL} = \hbar \frac{e B}{m_e} \left(n + \frac{1}{2} \right) = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right), n = 0, 1, 2 \dots$$

При учёте спина электрона к оператору Гамильтона добавляется слагаемое $-g \mu_B \hat{\vec{B}} \hat{s}$

Энергия с учётом спина

$$E = E_{nL} = \hbar \frac{e B}{m_e} \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm \frac{1}{2} g \mu_B B \quad \mu_B = \frac{e \hbar}{2 m_0}$$

g - фактор Ланде

m_0 - масса свободного электрона

Вырождение уровней энергии (уровней Ландау)

Циклические граничные условия вдоль X

$$\psi(x+L_x)=\psi(x)$$

Это накладывает условия на k_x

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x, \quad n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При изменении n_x на 1 волновая функция смещается на

$$\Delta y = \Delta k_x l_B^2 = \frac{2\pi \hbar}{eB L_x}$$

Это размер волновой функции вдоль оси Y.

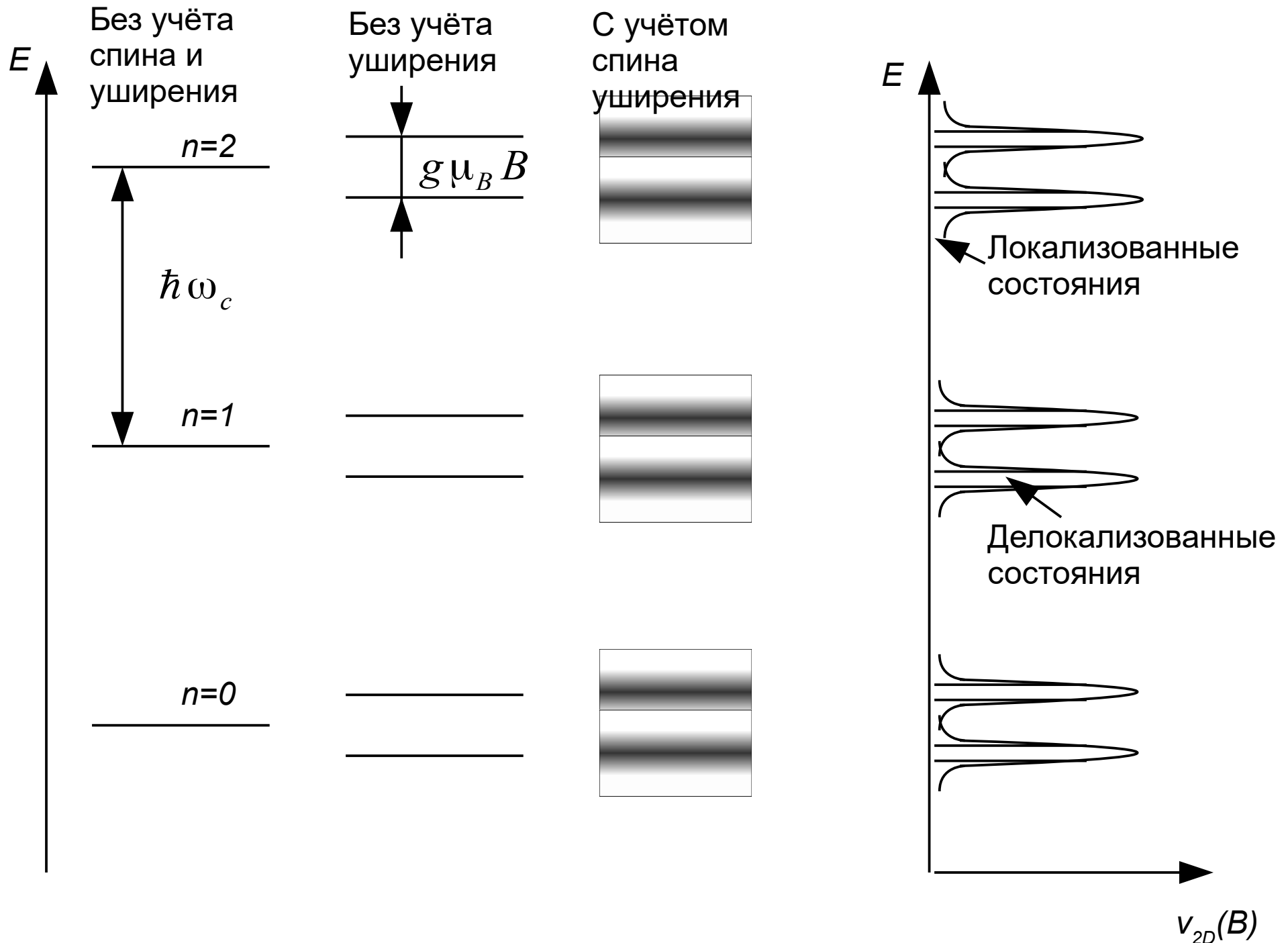
Если размер структуры вдоль оси Y равен L_y , Количество состояний для уровня Ландау

$$N_L = \frac{L_y}{\Delta y} = \frac{L_y}{\Delta k_x l_B^2} = L_x L_y \frac{eB}{2\pi \hbar}$$

Или на единицу площади двумерной структуры

$$N_L = \frac{eB}{2\pi \hbar} = \frac{1}{2\pi l_B^2}$$

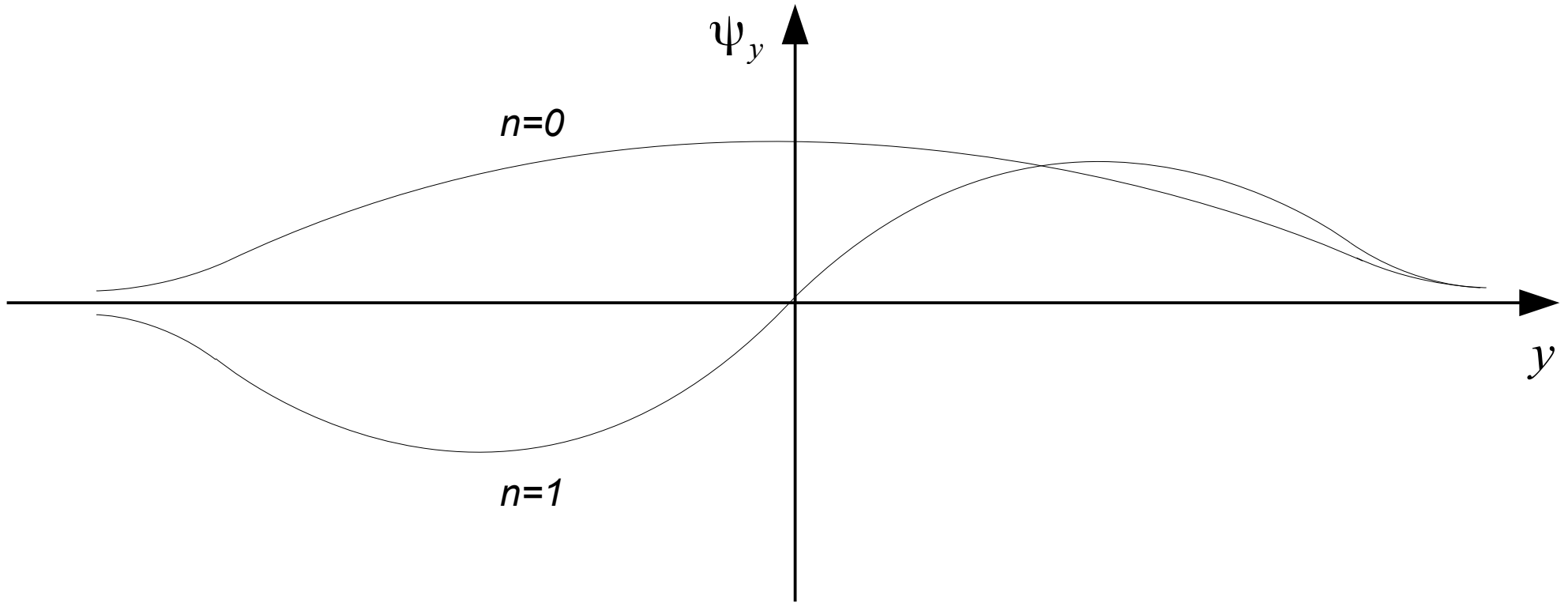
Энергетический спектр электронов в магнитном поле



Из-за спина уровни Ландау расщепляются, из-за беспорядка уширяются

Свойства волновой функция электрона

Зависимость волновой функции от y



Центр волновой функции в направлении y

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_y(y)|^2 y dy = k_x l_B^2$$

Плотность потока вероятности

Вывод уравнения непрерывности

Уравнение Шредингера и сопряжённое ему домножаем на волновую функцию и комплексомопряжённую

$$\psi^* \times i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2 m_e} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) - \frac{2 i \hbar e B y}{2 m_e} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{e^2 B^2 y^2}{2 m_e} \psi$$

$$\psi \times -i \hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2 m_e} \left(\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2} \right) + \frac{2 i \hbar e B y}{2 m_e} \frac{\partial \psi^*}{\partial x} + \frac{e^2 B^2 y^2}{2 m_e} \psi^*$$

После почленного сложения

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = -\frac{\hbar}{2 m_e i} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial y} \right) \right] - \frac{e B y}{2 m_e} \frac{\partial}{\partial x} |\psi|^2$$

Сравниваем с общим видом уравнения непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 = -\frac{\partial i_x}{\partial x} - \frac{\partial i_y}{\partial y}$$

Получаем для компонент плотности потока вероятности

$$i_x = \frac{\hbar}{2 m_e i} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) - \frac{e B y}{2 m_e} |\psi|^2 = \frac{\hbar k_x}{2 m_e} |\psi_y|^2 - \frac{e B y}{2 m_e} |\psi_y|^2 \quad i_y = 0$$

Плотность потока и сила электрического тока

Для одного состояния сила тока

$$I_1 = -e \int_{-\infty}^{\infty} i_x(y) dy$$

Полная сила тока

$$I(B) = \int_{-\infty}^{\infty} I_1(E) v_{2D}(B) f(E) dE$$

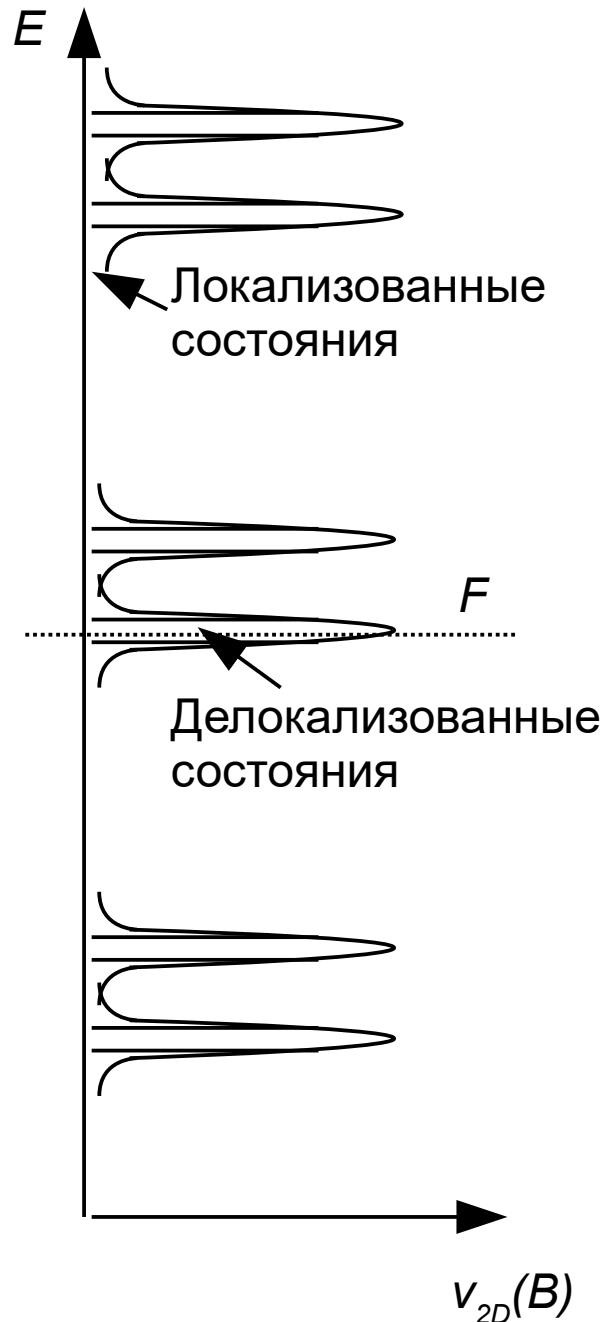
Подставляем полученную волновую функцию

$$I_1 = -\frac{e^2 B}{2m_e} \left(k_x l_B^2 - \int_{-\infty}^{\infty} y |\psi(y)|^2 dy \right) = 0$$

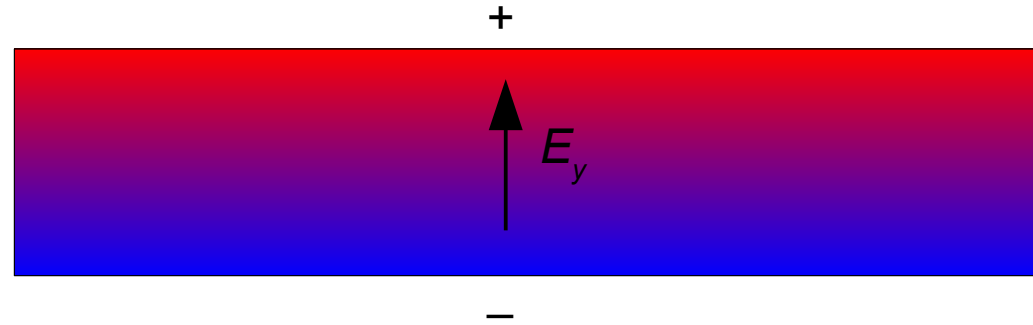
Как переносится ток в магнитном поле?

При $T \approx 0$ (КЭХ наблюдается при низкой температуре) можно выделить два случая в зависимости от расположения уровня Ферми

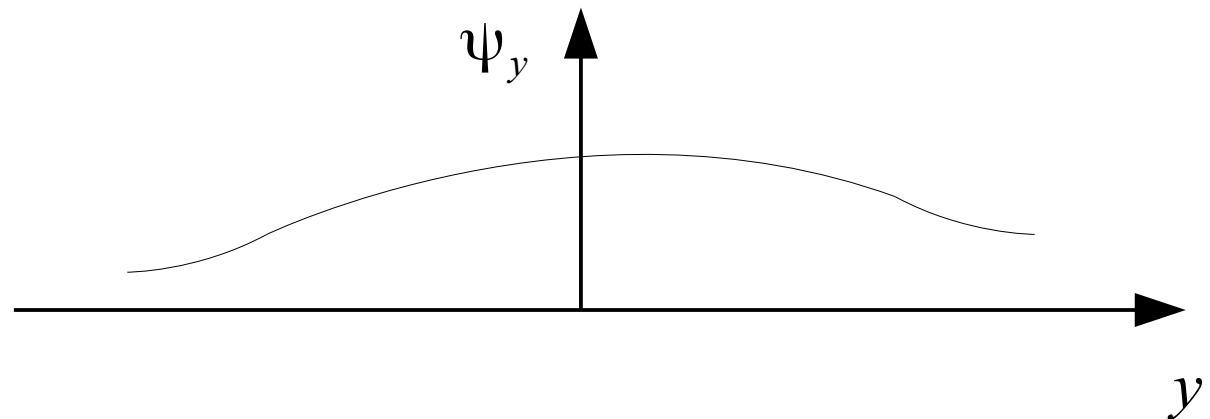
Уровень Ферми в области энергий делокализованных состояний



Электрическое поле E_x уменьшает k_x на $-eE_x\tau$.
В результате при меньших y состояния заполняются электронами с большей вероятностью. Нарушается электронейтральность структуры, появляется компенсирующее электрическое поле вдоль оси Y и напряжение Холла

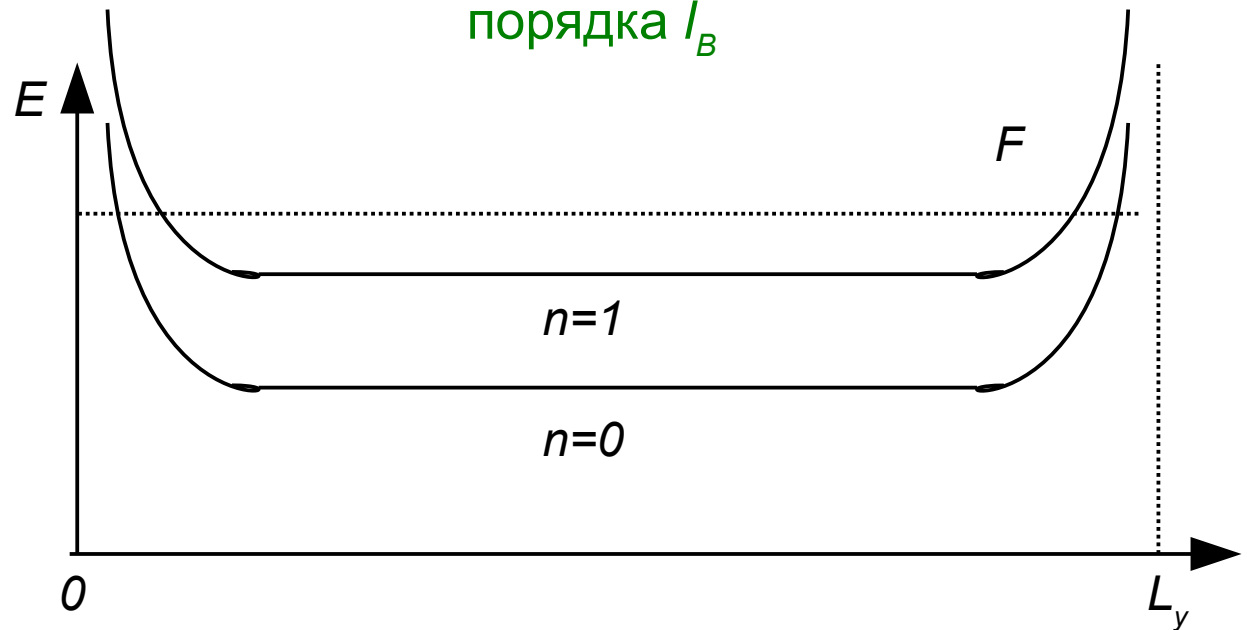
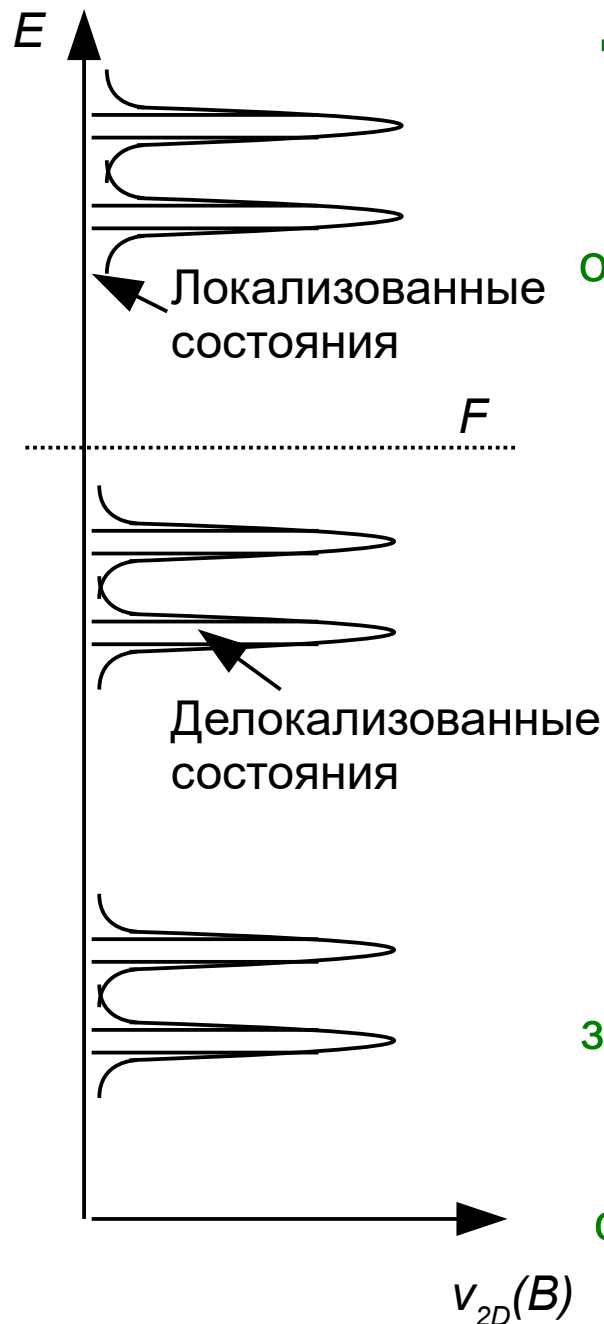


Электрическое поле E_y искажает волновую функцию, так что её центр смещается в сторону больших Y от $k_x l_B^2$.
Поэтому сила тока одного состояния становится отличной от 0.



Уровень Ферми в области энергий локализованных состояний

В этом случае перераспределение электронов между делокализованными состояниями невозможно. На краях структуры потенциальная энергия электронов увеличивается. Уровни Ландау загибаются вверх и пересекают уровень Ферми. В местах пересечения образуются одномерные токонесущие состояния шириной порядка l_B



Направление движения электронов в этих состояниях задано отклонением центра волновой функции от $k_x l_B^2$. Это отклонение для противоположных краёв противоположное. Поэтому ток в одномерных каналах слева и справа течёт в разных направлениях. Кроме того рассеяние в каналах невероятно (вероятность туннелирования на другой край ничтожна)

Осцилляции ρ_{xx} в зависимости от магнитного поля и напряжения исток-затвор в МДП структуре

Время релаксации τ и плотность состояний зависят от энергии. Поэтому при поддержании постоянной силе тока напряжение вдоль оси X осциллирует при пересечении уровнем Ферми уровня Ландау.

Эти осцилляции периодичны в зависимости от $1/B$

Запишем условие совпадения уровня Ферми с уровнем Ландау с номером n и $n+1$

$$F - E_l = \frac{\hbar e B_n}{m_e} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad F - E_l = \frac{\hbar e B_{n+1}}{m_e} \left(n + 1 + \frac{1}{2} \right)$$

Отсюда получаем

$$n + \frac{1}{2} = \frac{m_e (F - E_l)}{\hbar e B_n} \quad n + 1 + \frac{1}{2} = \frac{m_e (F - E_l)}{\hbar e B_{n+1}}$$

Вычитаем из правого левое и получаем для периода T_B и частоты F_B осцилляций от двумерной подзоны с минимумом энергии E_l .

$$T_B = \frac{1}{B_{n+1}} - \frac{1}{B_n} = \frac{e \hbar}{m_e (F - E_l)} \quad F_B = \frac{1}{T_B} = \frac{m_e (F - E_l)}{e \hbar}$$

Сила тока переносимого краевыми состояниями образованными от одного уровня Ландау ($T=0$ К).

Сила тока переносимого левым краевым состоянием ($y=0$)

$$I_+ = \frac{e}{2\pi} \int_{E_{nL}}^{F_l} v_x dk_x = \frac{e}{2\pi\hbar} \int_{E_{nL}}^{F_l} \frac{dE}{dk_x} dk_x = \frac{e}{2\pi\hbar} (F_l - E_{nL})$$

Сила тока переносимого правым краевым состоянием ($y=L_y$)

$$I_- = \frac{e}{2\pi} \int_{E_{nL}}^{F_r} v_x dk_x = \frac{e}{2\pi\hbar} \int_{E_{nL}}^{F_r} \frac{dE}{dk_x} dk_x = \frac{e}{2\pi\hbar} (F_r - F_l)$$

Полная сила тока

$$I = I_+ - I_- = \frac{e}{2\pi\hbar} (F_l - F_r) = \frac{e^2}{2\pi\hbar} U_H$$

В случае если в уровнях Ландау расположено ниже уровня Ферми

$$I = \frac{e^2 v}{2\pi\hbar} U_H$$

F_l, F_r — уровень Ферми с левого и правого края

Недиагональные компоненты тензора электропроводности и сопротивления. Фактор заполнения.

Компоненты тензора удельного сопротивления

$$\rho_{xy} = - \frac{U_{y(H)}}{I} = - \frac{2\pi\hbar}{e^2\nu}$$

Компоненты тензора электропроводности

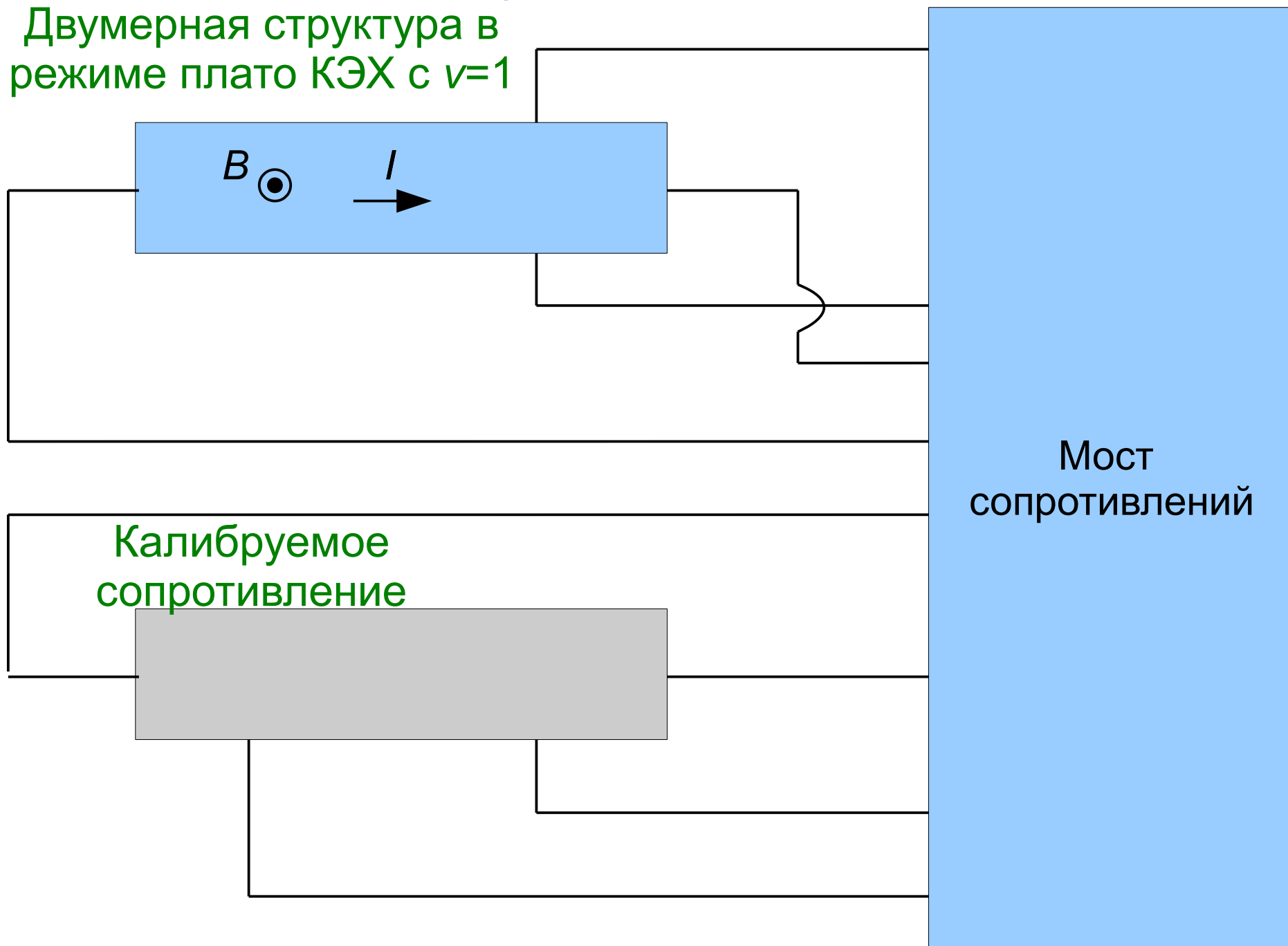
$$\sigma_{xy} = - \frac{1}{\rho_{xy}} = \frac{e^2\nu}{2\pi\hbar}$$

Фактор заполнения

$$\nu = \frac{n_{2D}}{N_L} = \frac{2\pi\hbar n_{2D}}{eB}$$

Эталон сопротивления на основе КЭХ.

Двумерная структура в
режиме плато КЭХ с $\nu=1$



Калибруемое
сопротивление

Мост
сопротивлений

Достигнута относительная неопределённость воспроизведения h/e^2
менее 10^{-8}

Условие наблюдения квантового эффекта Холла и осцилляций

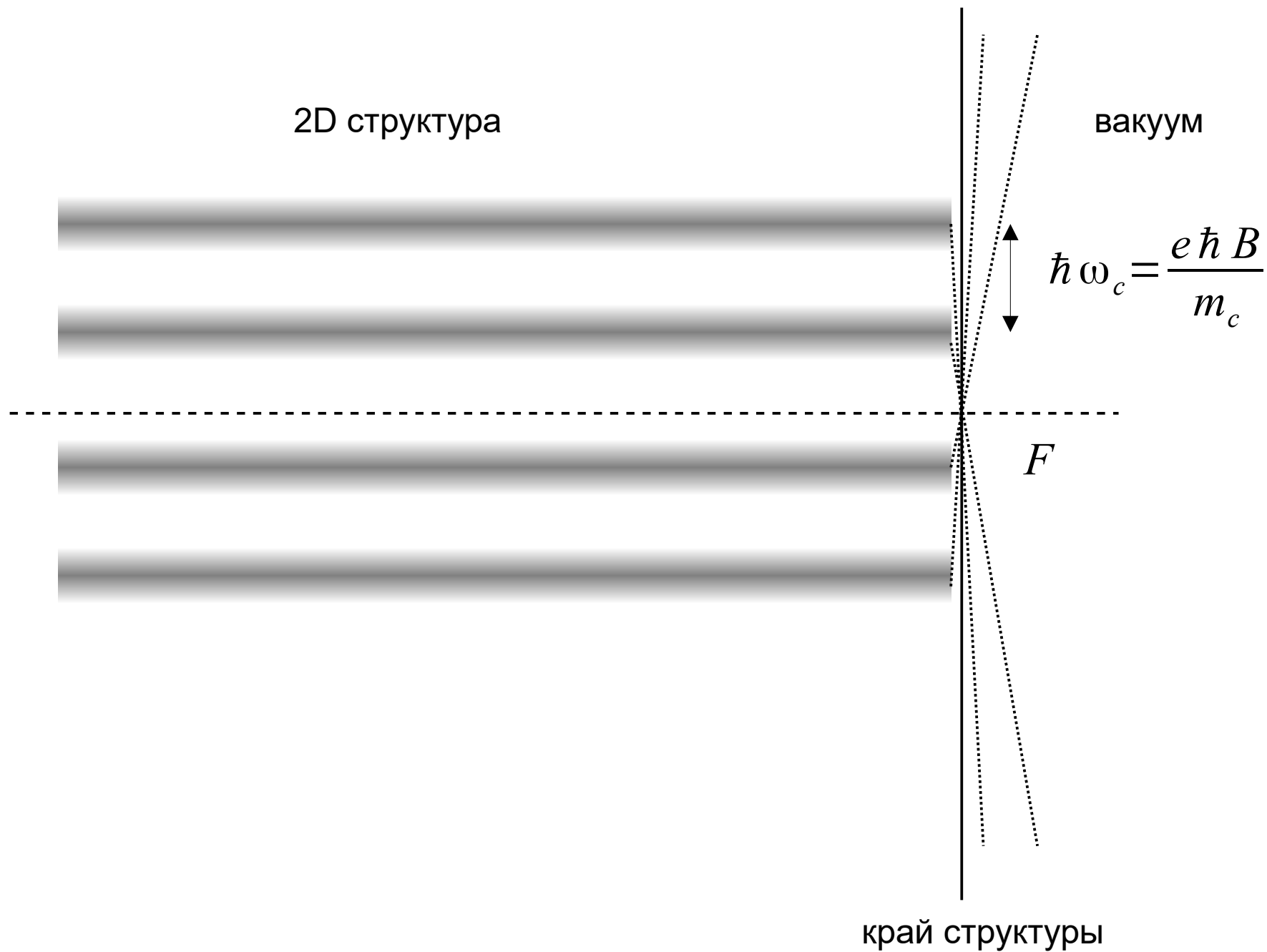
Условие образования уровней Ландау: период классического движения электрона по циклотронной орбите должен быть меньше чем время релаксации импульса, т.е. электрон должен совершить хотя бы один оборот прежде чем он рассеивается

$$\omega_c \tau \gg 1$$

Условие на температуру: разность в энергии между уровнями Ландау должно быть больше тепловой энергии

$$\hbar \omega_c \gg k_B T$$

Состояние плато квантового эффекта Холла как изолятор



Топологический инвариант – число Черна

Выражение для скорости электрона в двумерной кристаллической структуре:

$$\vec{v}_n(\vec{q}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E_n(\vec{k}) - \frac{e}{\hbar} [\vec{E} \vec{\Omega}_n(\vec{k})] \quad \hbar \vec{k} = \hbar \vec{q} + e \vec{A} \quad \vec{E} = -\partial_t \vec{A}(t)$$

$$\vec{\Omega}_n(\vec{k}) = \nabla \times \langle u_n(\vec{k}) | i \nabla_{\vec{k}} | u_n(\vec{k}) \rangle - \text{кривизна Берри}$$

Выражение для плотности тока в двумерной кристаллической структуре:

$$\vec{j} = -e \sum_n \int_{BZ} \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \vec{v}_n(\vec{k})$$

Если целое число уровней Ландау заполнено:

$$j_H = E_{\parallel} \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_n \int_{BZ} \Omega_n(\vec{k}) d^2 k = E_{\parallel} \frac{e^2}{2\pi\hbar} \nu C$$

$$C = \int_{BZ} \Omega_n(\vec{k}) d^2 k - \text{число Черна}$$