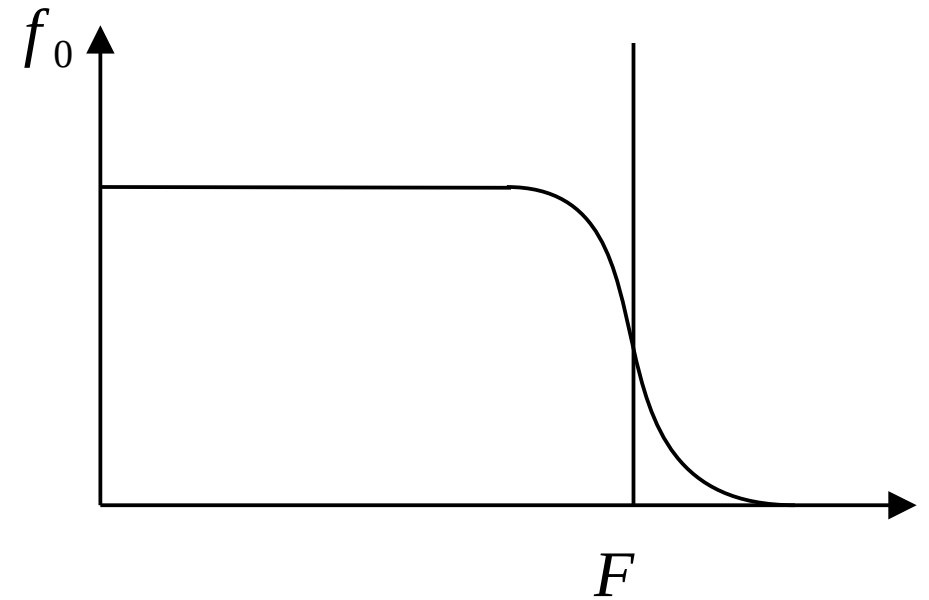
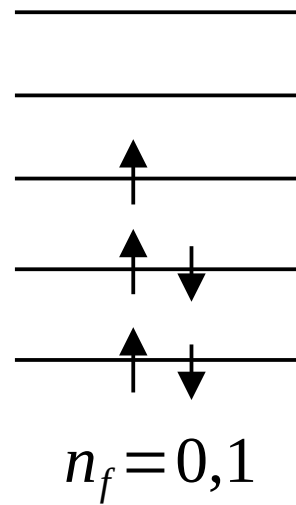
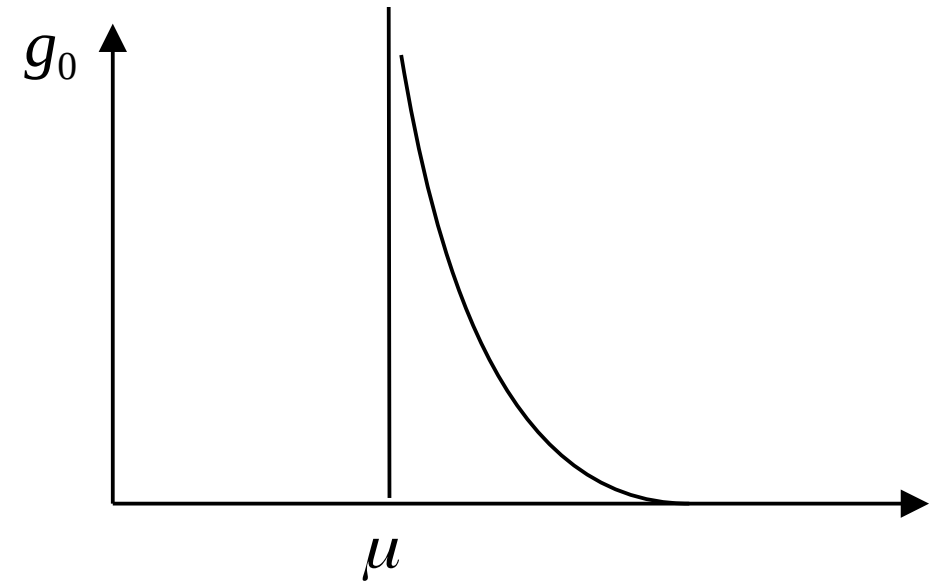
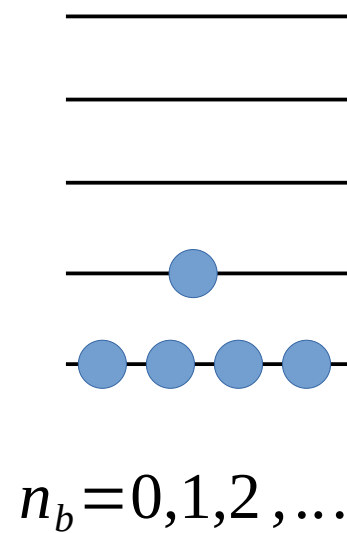


Средние числа заполнения. Функции распределения Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна

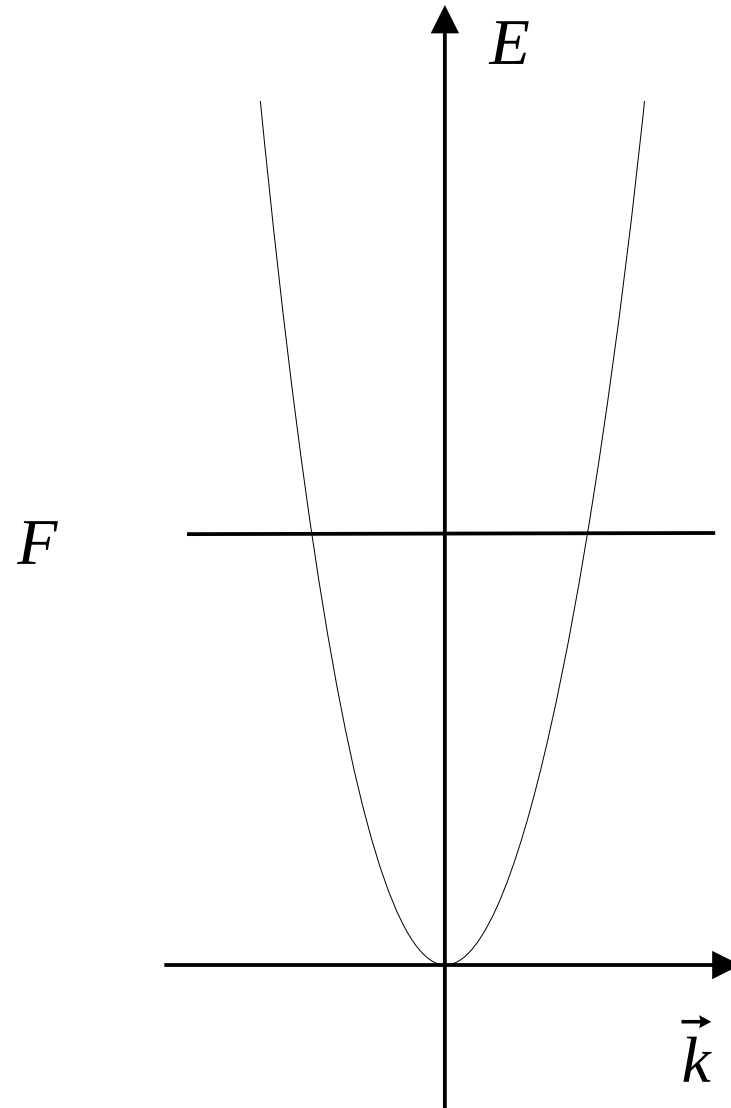
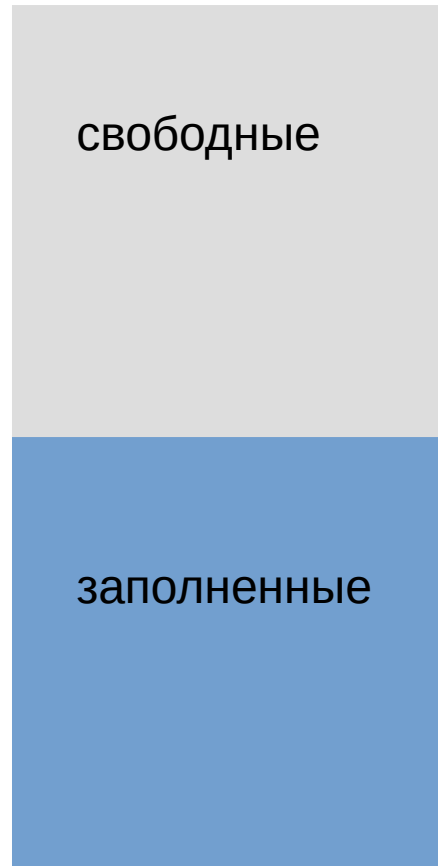
$$\langle n_f \rangle = f_0 = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - F}{k_B T}\right) + 1}$$



$$\langle n_b \rangle = b_0 = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right) - 1}$$

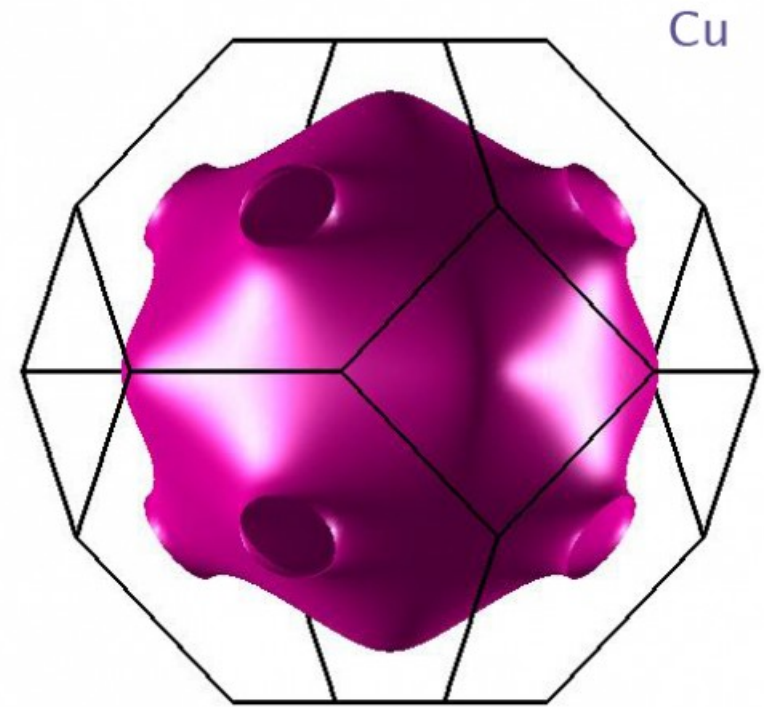


Энергия Ферми и поверхность Ферми в металлах

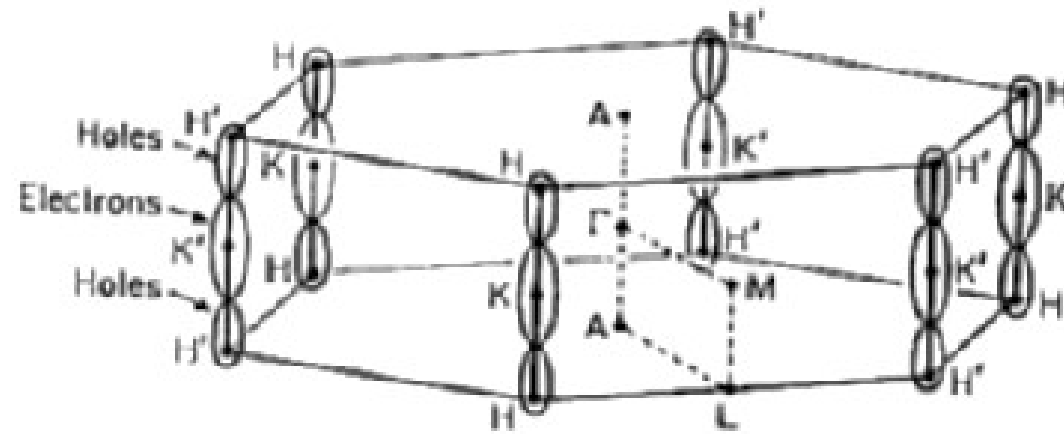


Уравнение поверхности Ферми

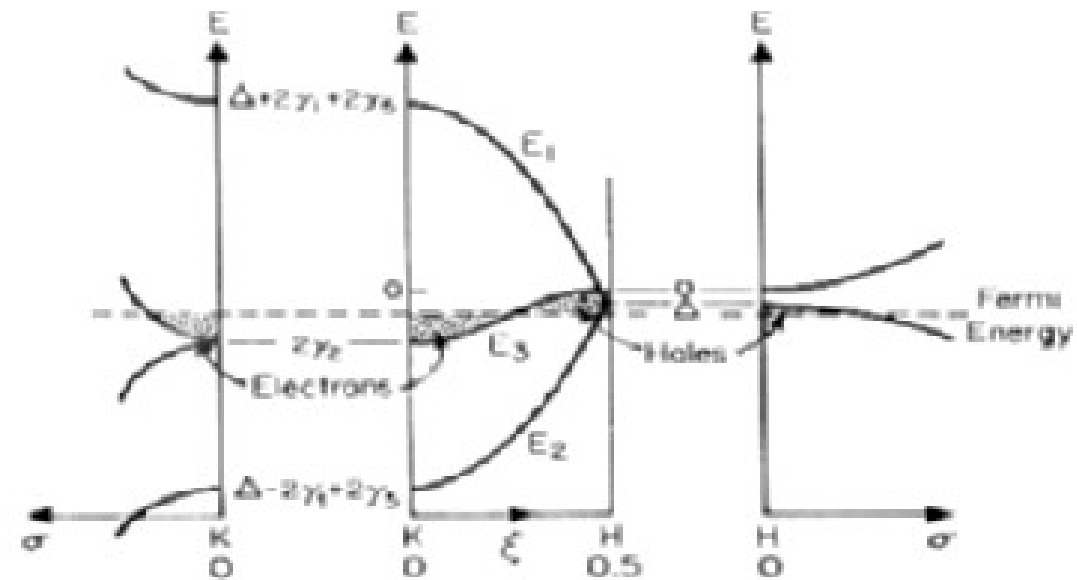
$$E(\vec{p}) = F$$



Сложные поверхности Ферми. Графит.



Brillouin Zone and Fermi Surface



Band structure

Частицы и античастицы в металлах. Ферми-газ и Ферми-жидкость



Энергия квазичастиц
отсчитывается от энергии Ферми

$$E(\vec{p}) = E_e(\vec{p}) - F$$

Простой случай

$$E(\vec{p}) = \frac{1}{2m}(p^2 - p_F^2) \approx \frac{p_F}{m}(p - p_F) = v_F(\vec{p} - \vec{p}_F)$$

Общий случай

$$E(\vec{p}) \approx \nabla_p E|_{p_F}(\vec{p} - \vec{p}_F) = v_F(\vec{p} - \vec{p}_F)$$

В теории Ферми-жидкости взаимодействие между электронами описывается перенормировкой фермиевской скорости и эффективной массы квазичастиц. Сами квазичастицы практически не взаимодействуют

Объём одноэлектронного состояния

Выделим произвольный куб со стороной L (L кратно периоду решётки) Периодические граничные условия на границах куба

$$\begin{aligned}\varphi(x+L) &= \varphi(x) & k_x L &= 2\pi n_x, n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots & k_x &= \frac{2\pi}{L} n_x, n_x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \\ \varphi(y+L) &= \varphi(y) & k_y L &= 2\pi n_y, n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots & k_y &= \frac{2\pi}{L} n_y, n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \\ \varphi(z+L) &= \varphi(z) & k_z L &= 2\pi n_z, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots & k_z &= \frac{2\pi}{L} n_z, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots\end{aligned}$$

Объём одного состояния в k -, p -пространстве

$$V_k = \frac{(2\pi)^3}{L^3} \quad V_p = \frac{(2\pi \hbar)^3}{L^3}$$

Объём одного состояния в k -, p -пространстве на единицу объёма в r -пространстве

$$V_k = (2\pi)^3 \quad V_p = (2\pi \hbar)^3$$

В k -, p -пространстве все состояния делокализованных квазичастиц распределены равномерно. Каждое занимает одинаковый объём

Плотность одноэлектронных (одночастичных) состояний

Плотность одночастичных состояний $g(E)$ – концентрация (количество одночастичных состояний в единице объёма), имеющих энергию в пределах единичного интервала энергий

Пусть $N(E' < E)$ – концентрация одночастичных состояний с энергией $E' < E$

$$g(E) = \frac{\partial N(E' < E)}{\partial E} \quad N(E' < E) = \frac{2 V_p(E' < E)}{(2 \pi \hbar)^3}$$

Пример
$$E = E_c + \frac{p_x^2}{2 m_{xx}} + \frac{p_y^2}{2 m_{yy}} + \frac{p_z^2}{2 m_{zz}}$$

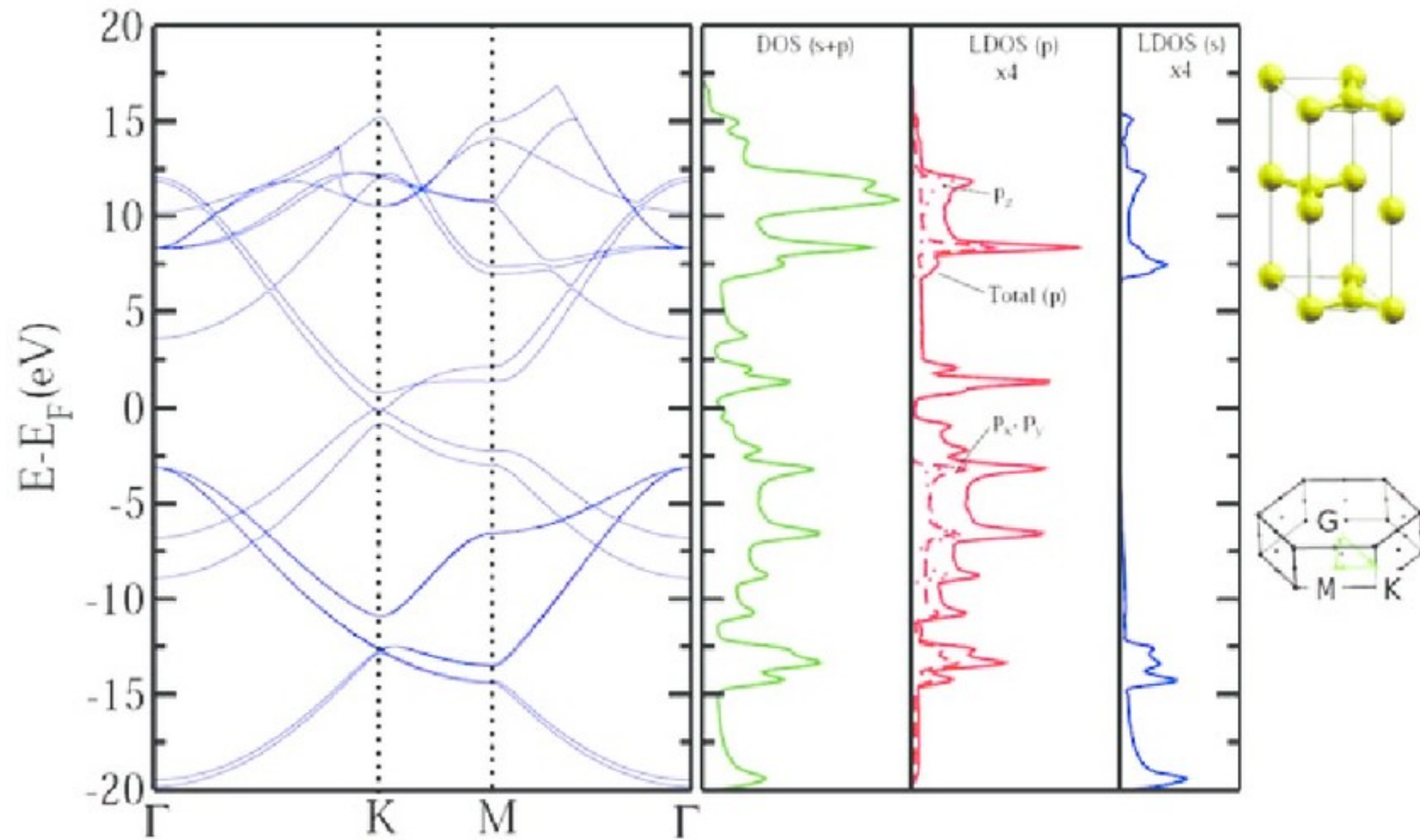
Состояния с энергиями меньшими E расположены внутри эллипсоида с полуосями

$$\sqrt{2 m_{xx}(E - E_c)} \quad \sqrt{2 m_{yy}(E - E_c)} \quad \sqrt{2 m_{zz}(E - E_c)}$$

Объём эллипсоида
$$V(E' < E) = \frac{4}{3} \pi \sqrt{2} \sqrt{m_{xx} m_{yy} m_{zz}} (E - E_c)^{3/2}$$

$$N(E' < E) = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2 m_{xx} m_{yy} m_{zz}}}{\pi^2 \hbar^3} (E - E_c)^{3/2} \quad g(E) = \frac{\partial N(E' < E)}{\partial E} = \frac{\sqrt{2 m_{xx} m_{yy} m_{zz}} (E - E_c)^{1/2}}{\pi^2 \hbar^3}$$

Плотность одноэлектронных (одночастичных) состояний. Примеры.



Концентрация электронов и дырок. Положение уровня Ферми.

Концентрация электронов в зоне проводимости полупроводника

$$n = \int_{E_c}^{\infty} \frac{g(E) dE}{\exp\left(\frac{E-F}{k_B T}\right) + 1}$$

Концентрация дырок в валентной зоне полупроводника

$$p = \int_{-\infty}^{E_v} g(E) \left[1 - \frac{1}{\exp\left(\frac{E-F}{k_B T}\right) + 1} \right] dE$$

Положение уровня Ферми определяется через уравнение электронейтральности

$$p(F) - n(F) = N_+ - N_-$$

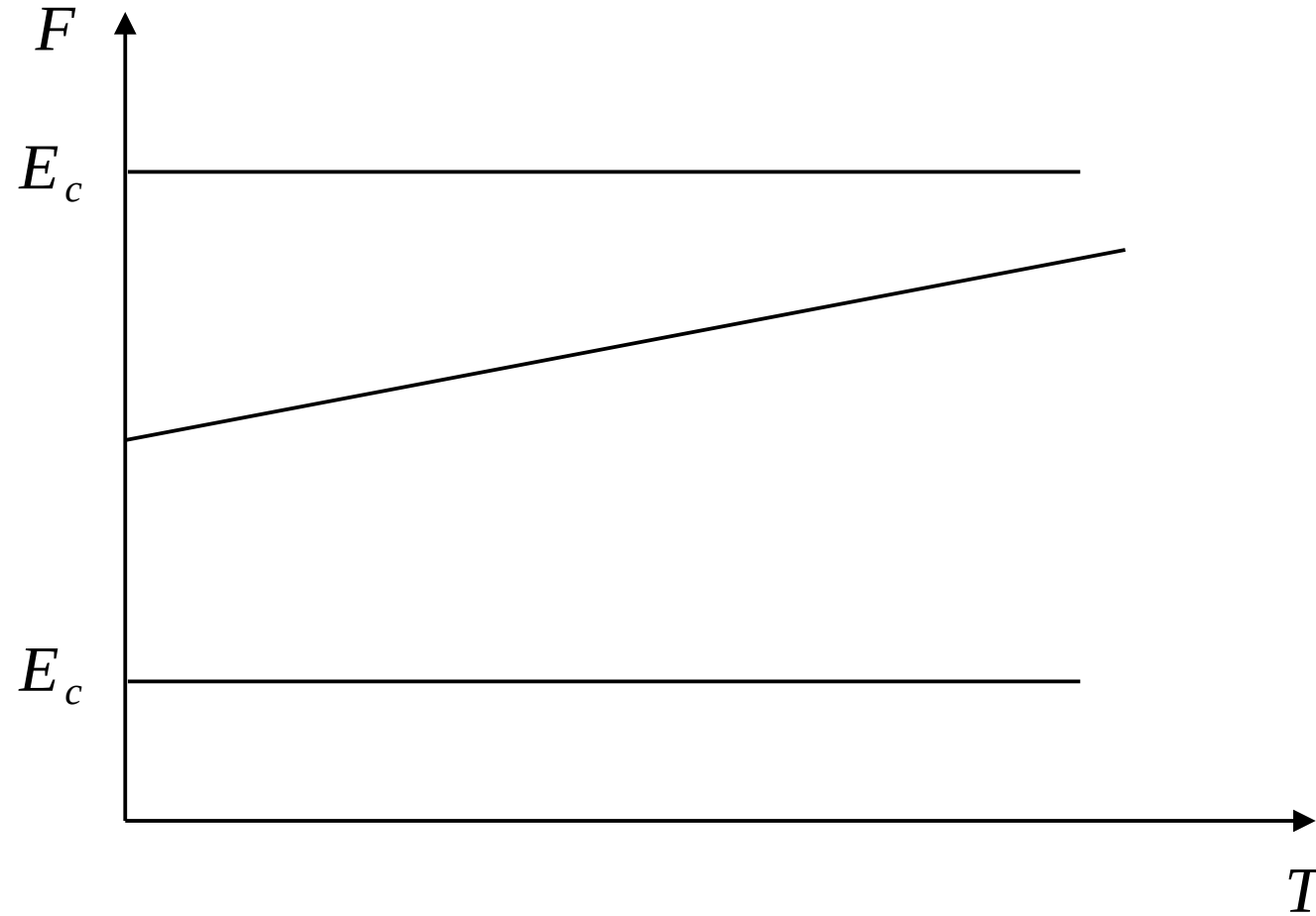
Вырожденная статистика. Квадратичный закон дисперсии

$$E = E_c + \frac{p^2}{2m_e} \quad k_B T < F - E_c \quad \longrightarrow \quad n \approx \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2} m_e^{3/2} (F - E_c)^{3/2}}{\pi^2 \hbar^3}$$

Невырожденная статистика. Квадратичный закон дисперсии

$$E = E_c + \frac{p^2}{2m} \quad 0 < E_c - F, k_B T \ll E_c - F \quad \longrightarrow \quad n \approx \frac{m_e^{3/2} (k_B T)^{3/2}}{\sqrt{2} \pi^{3/2} \hbar^3} \exp\left(\frac{F - E_c}{k_B T}\right)$$

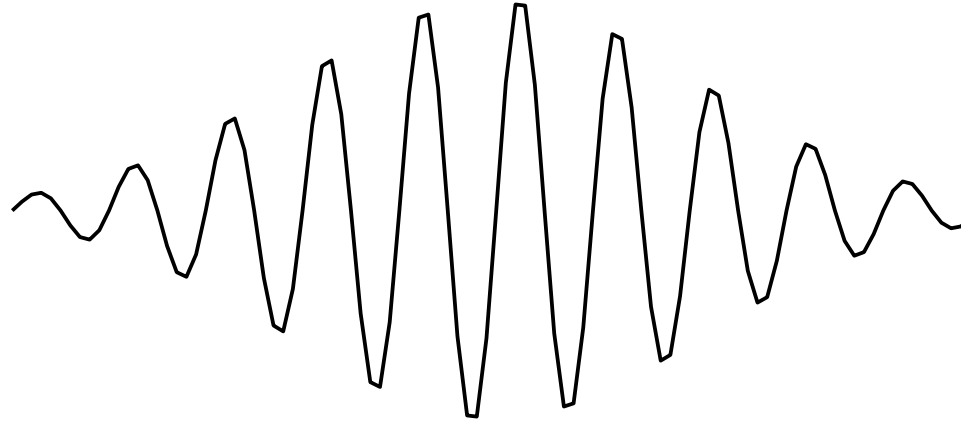
Температурная зависимость положения уровня Ферми в собственном полупроводнике.



При стремлении температуры к абсолютному нулю уровень Ферми стремится к середине запрещённой зоны.
При повышении температуры уровень Ферми смещается к зоне с меньшей плотностью состояний.

Квазиклассическое описание явлений переноса заряда. Квазичастицы как волновые пакеты.

Носитель заряда – волновой пакет с определённым положением в пространстве



Средняя скорость $\langle \vec{v} \rangle = \frac{d \langle \vec{r} \rangle}{d t} = \nabla_p E$

Среднее ускорение $\langle \vec{a} \rangle = \frac{d^2 \langle \vec{r} \rangle}{d t^2} = \left(\frac{\hat{1}}{m} \right)^{-1} (-e \vec{E})$

Неравновесная функция распределения и кинетическое уравнение Больцмана.

Функция распределения Ферми-Дирака описывает равновесное состояние.

При воздействии внешнего поля, неоднородного распределения температуры, внешнего осевщания и т.д. электронная система в кристалле может быть выведена из равновесия. При этом:

$$f(E, F, T) \neq \frac{1}{\exp\left(\frac{E - F}{k_B T}\right) + 1}$$

При квазиклассическом описании координата и импульс определяются одновременно и для нахождения неравновесной функции распределения можно использовать кинетическое уравнение Больцмана.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\nabla_p f (-e \vec{E} - e[\vec{v} \vec{B}])) + \nabla f \vec{v} = \sum_{\vec{p}'} [W(\vec{p}', \vec{p}) f(\vec{p}') (1 - f(\vec{p})) - W(\vec{p}, \vec{p}') f(\vec{p}) (1 - f(\vec{p}'))]$$

$W(\vec{p}, \vec{p}')$ - вероятность рассеяния