Оглавление

Глава 1

Введение

1.1 Стилизованные факты экономического роста (факты Калдора)

1. Производительность труда возрастает с неубывающим темпом
2. Капиталовооруженность труда тоже растет с неубывающим темпом
3. Реальная процентная ставка или норма доходности капитала устойчива
4. Отношение капитала к выпуску устойчиво
5. Доли капитала и труда постоянны в национальном доходе
6. В быстро растущих странах темпы роста существенно разнятся

[1]

[1] Kaldor, Nicholas (1957). A Model of Economic Growth. The Economic Journal. 67 (268): 591–624.
Kaldor, Nicholas, Capital Accumulation and Economic Growth, in F.A. Lutz and D.C. Hague, eds., The Theory of Capital, St.Martins Press, 1961, pp. 177–222.

Глава 2

Неоклассические модели долгосрочной экономической динамики

2.1 Неоклассическая производственная функция

Предположения:

1. Постоянная отдача от масштаба по обеим переменным.
   - Считаем экономику достаточно большой, чтобы были исчерпаны возможности для специализации. Поэтому отдача от масштаба – не возрастает.
   - Считаем, что мы учли все значимые факторы производства. Поэтому отдача от масштаба – не убывает.
2. Убывающая предельная производительность отдельных факторов. (причина отсутствия эндогенного роста ВВП на душу населения в неоклассических моделях)

Чтобы сочетать свойства 1 и 2 производственная функция должна зависеть как минимум от двух факторов. Например, от капитала K и труда L. В действительности, конечно, факторов больше, и всех их учесть трудно. Например, для производства нужна территория, которая вообще-то ограничена. Поэтому постоянную отдачу от масштаба можно предполагать лишь до определённых размеров экономики.

Примеры функций с постоянной отдачей от масштаба (положительной однородностью первой степени) – функции с постоянной эластичностью замещения (CES):

- Все функции следующего вида:

$$F(K,L) = (\alpha K^\eta + \beta L^\eta)^{\frac{1}{\eta}}\,. \tag{2.1}$$

- В частности (при $\eta = 1$) линейная однородная функция:

$$F(K,L) = \alpha K + \beta L$$

- Функция Кобба-Дугласа

$$F(K,L) = K^\alpha L^{1-\alpha},$$

при $\alpha + \beta = 1$ равна пределу функции (2.1):

$$\lim_{\eta \to 0} \left(\alpha K^{\eta} + (1-\alpha) L^{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta}} = K^{\alpha} L^{1-\alpha},$$

что можно показать логарифмируя (2.1) и применяя правило Лапиталя.

- Функция Леонтьева

$$F(K, L) = \min\{K, L\}.$$

при $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ равна пределу функции (2.1):

$$\lim_{\eta \to -\infty} \left(\alpha K^{\eta} + \beta L^{\eta}\right)^{\frac{1}{\eta}} = \min\{K, L\}.$$

В следующем подразделе мы покажем, что производственные функции с постоянной отдачей от масштаба хорошо моделируют совершенную конкуренцию и позволяют агрегировать производство многих фирм с одинаковой производственной функцией в одно большое производство с этой же функцией.

2.2 Совершенная конкуренция

Совершенная конкуренция предполагает что:

- фирмы считают цены заданными, т.е. не зависящими от отдельного решения фирмы о количестве факторов производства, ввиду малости фирмы,

- отсутствуют "барьеры" для входа новых фирм на рынок.

В следствии этих предположений фирмы должны получать нулевую операционную прибыль, выручку от продажи товара за вычетом расходов на факторы производства:

$$\Pi(K, L) = F(K, L) - RK - wL,$$

где R – реальная ставка аренды капитала минус норма амортизации)[1], а w – реальная заработная плата, которые фирма считает не зависящими от того сколько она арендует капитала и наймет рабочих, то есть от K и L.

Если производственная функция обладает свойством постоянной отдачи от масштаба, то прибыль будет также обладать этим свойством. Тогда, если производственная функция дифференцируема по её аргументам, то по теореме Эйлера (см. например Acemoglu 2009, Theorem 2.1) прибыль можно выразить следующим образом

$$\Pi(K, L) = \frac{\partial \Pi}{\partial K} K + \frac{\partial \Pi}{\partial L} L$$

[1] Если цена капитала $p_K(t)$ в единицах конечного продукта в экономике меняется, то реальные альтернативные издержки единицы средств, потраченных на аренду капитала, равны реальной процентной ставке $r(t)$ плюс темп прироста цены капитала: $r(t) + \dot{p}_K(t)/p_K(t)$. С учетом постоянной нормы выбытия капитала δ цена аренды капитала для фирмы составит $R(t) = (\delta + r(t))\, p_K(t) + \dot{p}_K(t)$. Если $p_K(t) \equiv 1$, то $R(t) = \delta + r(t)$. В некоторых моделях амортизацию капитала вносят в производсвенную функцию, которая сохраняет при этом свойства неоклассической производсвенной функции: постоянную отдачу от масштаба и убывающую предельную производительность факторов производства.

Откуда следует, что если при естественных требованиях неотрицательности факторов производства существует максимальная прибыль фирмы, то она должна быть нулевой[2]

$$\max_{K\geq 0,\, L\geq 0} \Pi(K,L) = 0$$

Заметим, что задача максимизации прибыли в каждый момент времени решает и задачу максимизации приведённой прибыли?????

2.2.1 Агрегирование

Пусть всем фирмам доступна одинаковая технология в виде производственной функции $F(K,L)$ с постоянной отдачей от масштаба и каждая фирма нанимает L_j единиц труда и арендует K_j, которые в сумме составляют весь поток труда и весь поток капитала:

$$\sum_j L_j = L, \quad \sum_j K_j = K.$$

Ввиду постоянной отдачи от масштаба функций F и Π, задачу фирмы j

$$\Pi(K_j, L_j) = F(K_j, L_j) - RK_j - wL_j \to \max_{K_j\geq 0,\, L_j\geq 0},$$

с $L_j > 0$ можно записать в удельных величинах на единицу труда

$$k = \frac{K_j}{L_j}, \quad \pi(k) \equiv \Pi(k,1) = \frac{\Pi(K_j,L_j)}{L_j}, \quad f(k) \equiv F(k,1) = \frac{F(K_j,L_j)}{L_j}$$

$$\pi(k) = f(k) - Rk - w \to \max_{k\geq 0} = 0.$$

Откуда получаем для любой фирмы j капиталовооружённость k определяется равновесной ставкой аренды капитала и заработную плату

$$R = f'(k).$$

Так как функция f одинакова для всех фирм, у всех фирм будет одинаковая капиталовооружённость $k = K/L$. Равновестную заработную плату определяем из условия отсутствия прибыли

$$w = f(k) - f'(k)\,k.$$

2.3 Функция Кобба-Дугласа и доли факторов в выпуске

В 1927 году, когда Пол Дуглас работал профессором экономики, он заметил, что распределение национального дохода между затратами на труд L и капитал K остается приблизительно одинаковым на протяжении длительного времени. Дуглас попросил математика Чарльза Кобба найти производственную функцию $F(K,L)$, которая бы приводила к такому результату, при

[2] Необходимое условие максимума (оптимальности) функции $\Pi(K,L)$, например по $K \geq 0$, состоит в выполнении одного из равенств: $\frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0$ или $K = 0$. Заметим, что при $K > 0$ считается, что производственная функция дифференцируема.

реальных ценах R и w факторов производства K и L равных их предельным производительностям

$$R = \frac{\partial Y}{\partial K}, \qquad w = \frac{\partial Y}{\partial L}.$$

[3] Рассмотрим функцию Кобба-Дугласа с техническим прогрессом воплощённым в труде

$$Y = K^{\alpha} (AL)^{1-\alpha}.$$

[4] Из отсутствия прибыли при совершенной конкуренции получаем, что весь выпуск расходуется на оплату труда и аренду капитала $Y = R\,K - w\,L$

$$R\,K = \frac{\partial Y}{\partial K} K = \alpha Y, \qquad w\,L = \frac{\partial Y}{\partial L} L = (1-\alpha)\,Y.$$

Эластичности выпуска по капиталу и по труду оказываются постоянными долями факторов производства в выпуске

$$\frac{K}{Y}\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{\partial \log Y}{\partial \log K} = \alpha, \qquad \frac{L}{Y}\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{\partial \log Y}{\partial \log L} = 1-\alpha.$$

Эластичности в сумме равны единице, что соответствует нулевой прибыли.

2.4 Модель Солоу

Основные предположения

- Домохозяйства сохраняют постоянную долю $s \in [0, 1]$ их располагаемого дохода.
- Всем фирмам доступна одинаковая неоклассическая производственная функция. Предполагается существование репрезентативной фирмы с репрезентативной (или агрегированной) производственной функцией.
- Технология бесплатна и доступна всем как неисключающий и неконкурируемый товар.

Динамика капитала в модели Солоу-Свана в непрерывном времени описывается следующим дифференциальным уравнением (чистые инвестиции равны валовым инвестициям за вычетом амортизации)

$$\dot{K}(t) = sK(t)^{\alpha}(A(t)L(t))^{1-\alpha} - \delta K(t), \quad K(0) = K_0 > 0,$$

где $s \in (0, 1)$ – норма сбережения, эффективность труда $A(t)$ и поток труда $L(t)$ растут от начальных уравней $A(0) = A_0 > 0$ и $L(0) = L_0 > 0$ с постоянными темпами

$$g = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)}, \quad n = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)},$$

δ – темп выбытия капитала (амортизации), $\alpha \in (0, 1)$.

---

[3] Необходимые условия максимума прибыли $\Pi(K, L) = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} - RK - wL$ считая, что R и w заданы, являются условиями равновесия (отсутствия арбитража) на рынках капитала и труда.

[4] Технический прогресс в форме $Y = F(K, AL)$ называется *нейтральным по Харроду*, $Y = AF(K, L)$ – *нейтральным по Хиксу*. Технический прогресс также можно считать воплощённым в капитале $Y = F(AK, L)$. Качественно результаты будут такими же.

Запишишем уравнения динамики в интенсивной форме, используя удельные переменные на единицу эффективного труда

$$y(t) = \frac{Y(t)}{A(t)L(t)}, \quad k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}.$$

$$\dot{k}(t) = sk(t)^{\alpha} - (\delta + g + n)\, k(t), \quad k(0) = k_0 \equiv \frac{K_0}{A_0 L_0} > 0.$$

Условие стационарности $\dot{k}(t) = 0$, когда *фактические инвестиции* sk^{α} и *восстанавливающие инвестиции* $(\delta + g + n)\, k$ равны, определяет две стационарных точки: неустойчивую $k = 0$ и устойчивую $k = k_*$. Асимтотически устойчивая (устойчивая притягивающая) точка находится из условия

$$sk_*^{\alpha-1} = \delta + g + n.$$

Потребление на единицу эффективного труда $c(t) = (1 - s)k(t)^{\alpha}$ в стационарной точке можно записать в виде $c_* = (1 - s)k_*^{\alpha} = k_*^{\alpha} - (\delta + g + n)\, k_*$, где мы подставили выражение для сбережений из условия стационарности $sk_*^{\alpha} = (\delta + g + n)\, k_*$.

Условие максимума c_* по норме сбережения $\frac{\mathrm{d}c_*}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}c_*}{\mathrm{d}k_*}\frac{\mathrm{d}k_*}{\mathrm{d}s} = 0$ называется *"золотое" правило*:

$$\alpha k_*^{\alpha-1} = \delta + g + n,$$

когда предельная производительность капитала $\alpha k^{\alpha-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}K} K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$ равна норме выбытия капитала плюс темпы роста наслелеия и технологического уровня.

Сравнивая условия стационарности и оптимальности находим, что норма сбережения "золотого" правила s_{gr} равна эластичности выпуска по капиталу. Для производственной функции Кобба-Дугласа $s_{gr} = \alpha$.

Какие свойства неоклассической модели (производственной функции) ограничивают удельное потребление на единицу эффективного труда $c(t) = (1 - s)k(t)^{\alpha}$?

"Золотое" правило в модели Солоу максимизирует долгосрочное потребление на единицу эффективного труда покажите, что это эквивалентно максимизации среднего потребления:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T c(t)\, \mathrm{d}t \to \max_{s\in[0,1]}$$

Неявно предполагая, что фирмы совершенно конкурентны, получаем выражения для процентной ставки r и зарплаты W в экономике

$$r(t) = \alpha k^{\alpha-1}(t) - \delta, \quad W(t) = A(t)\,(1-\alpha)\,\alpha\, k^{\alpha-1}(t)$$

2.4.1 Сравнение предсказаний модели с наблюдениями

Исследователи определяют два типа конвергенции стран по уровню ВВП на душу населения $y_i(t)$: абсолютную и условную.

1. Если в следующей регрессии по странам $i = 1, ..., I$ получили значимое неравенство $\beta_1 < 0$

$$\frac{1}{100} \ln\left(\frac{y_i(1980)}{y_i(1880)}\right) = \beta_0 + \beta_1 \ln\left(y_i(1880)\right) + \epsilon_i,$$

   где ϵ_i - ошибка, то какой тип конвергенции это подтверждает?

2. Если в следующей регрессии по странам $i = 1, ..., I$ получили значимое неравенство $\beta_1 < 0$

$$\frac{1}{100} \ln\left(\frac{y_i(1980)}{y_i(1880)}\right) = \beta_0 + \beta_1 \ln(y_i(1880)) + \beta_2 s_i + \beta_3 \delta_i + \beta_4 n_i + \epsilon_i,$$

   где ϵ_i - ошибка, s_i - норма сбережений, δ_i - темп амортизации, n_i - темп роста населения, то какой тип конвергенции это подтверждает? Модель Солоу-Свана объясняет условную конвергенцию ВВП на душу по странам разными прамаметрами (s_i, δ_i, n_i).

Основные расхождения с наблюдениями

- отличие y в 10 раз при $\alpha = 1/3$ объясняется только отличием k в 1000 раз. Это не реалистично.
- Предельная производительность капитала отличается существование репрезентативной фирмы с репрезентативной (или агрегированной) производственной функцией.

2.5 Модель Солоу с человеческим капиталом

Пусть динамика капитала в модели Солоу с человеческим капиталом H описывается следующими дифференциальными уравнениями

$$\dot{K}(t) = sAK(t)^{\alpha} H(t)^{\beta} L(t)^{1-\alpha-\beta}, \quad K(0) = K_0,$$

$$\dot{H}(t) = \nu AK(t)^{\alpha} H(t)^{\beta} L(t)^{1-\alpha-\beta}, \quad H(0) = H_0,$$

где $s, \nu \in (0,1)$ – постоянные нормы сбережения $s + \nu < 1$, A – постоянная, труд L растет с постоянным темпом $n = \frac{\dot{L}}{L} > 0$, выбытие (амортизация) капиталов отсутствует, $\alpha, \beta \in (0,1)$ и $\alpha + \beta < 1$.

1. Запишите уравнения динамики в интенсивной форме, используя переменные на единицу труда
$$y = \frac{Y}{L}, \quad k = \frac{K}{L}, \quad h = \frac{H}{L}.$$
2. Нарисуйте стационарные кривые в плоскости (k, h). Найдите выражение для стационарного состояния, когда $\dot{k} = 0$ и $\dot{h} = 0$.
3. Как описывает данная модель эмпирические данные по сравнению с моделью Солоу без человеческого капитала? Лучше или хуже? Рассмотрите пример двух стран, где ВВП на душу населения отличается в 10 раз.
4. Возможен ли в данной модели эндогенный долговременный экономический рост? Почему?

2.6 Модель Рамсея

Как и в модели Солоу будем считать, что труд $L(t)$ и его эффективность $A(t)$ в репрезентативном домохозяйстве прирастают с постоянными темпами

$$\frac{\dot{A}}{A} = g, \quad \frac{\dot{L}}{L} = n.$$

Выпуск задается неоклассической производственной функцией

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t))$$

с постоянной отдачей от масштаба по капиталу и эффективному труду.[5] Капитал амортизируется с постоянным темпом δ и динамика капитала имеет вид

$$\dot{K}(t) = F(K(t), A(t)L(t)) - C(t) - \delta K(t), \tag{2.2}$$

где $C(t)$ – потребление в экономике. Заметим, что правая часть уравнения имеет постоянную отдачу от масштаба по трем аргументам $K(t)$, $L(t)$ и $C(t)$. Поэтому это уравнение верно также и для пропорциональной части экономики, где $K(t)$, $L(t)$ и $C(t)$ будут одинаковыми долями от соответствующих величин экономики.

- Все члены домохозяйства имеют одинаковые предпочтения и потребляют $\frac{C(t)}{L(t)}$.
- Домохозяйство (неэластично) предлагает $L(t)$ единиц труда в единицу времени. Труд всего домохозяйства $L(t)$.
- Домохозяйства живут бесконечно долго

В модели Рамсея домохозяйство может потреблять не постоянную долю от выпуска и даже преобразовывать имеющийся капитал в потребление с учетом ограничения $K(t) \geq 0$. Будем считать, что предпочтения репрезентативного потребителя в каждом домохозяйстве выражается одинаковой мгновенной функцией полезности $u(C)$, в соответствии с которой будет выбираться его уровень потребления. Чтобы результат не зависел от начального размера домохозяйства, мы считаем что его члены имеют постоянную несклонность к риску θ:

$$\theta = -\frac{C\,u''(C)}{u'(C)}, \text{ для любых } C \geq 0$$

где $u(C)$ – (мгновенная) функция полезности репрезентативного потребителя в домохозяйстве от его потребления C.

Функции с постоянной относительной несклонностью к риску

$$\frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}, \quad \theta \neq 1, \qquad \ln(C) = \lim_{\theta \to 1} \frac{C^{1-\theta} - 1}{1-\theta},$$

сохраняют это свойство при афинных преобразованиях.

Мгновенная функция полезности домохозяйства, состоящего из $L(t)$ потребителей, состоит из суммы их мгновенных полезностей и выражается через мгновенную полезность репрезентативного потребителя, как $u\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right) \cdot L(t)$. [6]

[5] В производственной функции $F(K(t), A(t)L(t))$ технический прогресс воплощен в труде, или говорят, что он нейтрален по Харроду. Такая запись выбрана для удобства и не имеет весомых обоснований, то что прогресс не воплощен в капитале, $F(A(t)K(t), L(t))$, или не нейтрален по Хиксу $A(t)F(K(t), L(t))$. Однако, это предположение безвредно.

[6] Максимизацию суммы полезностей производят при, так называемом, утилитаристском подходе к формированию агрегированной функции полезности (функции общественного благосостояния) . Эгалитаристский подход предполагает максимизацию полезности наименее “счастливого” агента, т.е. того (или тех) у кого наименьшая функция полезности. При условии, что все агенты одинаковы, эгалитаристы счиатли бы мгновенную полезность домохозяйства $u\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right)$, а не $u\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right) \cdot L(t)$. Для обоих подходов предполагается сравнимость (comparability) функций полезности между собой.

Функция полезности домашнего хозяйства складывается из его мгновенных полезностей

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} u\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right) L(t)\,\mathrm{d}t, \tag{2.3}$$

где ρ – норма дисконтирования (мгновенной) полезности.

Перейдем к удельным переменным на единицу эффективного труда

$$c(t) \equiv \frac{C(t)}{A(t)L(t)}, \quad k(t) \equiv \frac{K(t)}{A(t)L(t)}, \quad y(t) \equiv \frac{Y(t)}{A(t)L(t)}, \quad f(k) \equiv F(k,1).$$

Учитывая $L(t) = L(0)e^{nt}$ и $A(t) = A(0)e^{gt}$ можно преобразовать мгновенную полезность

$$u\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right) L(t) = u(A(t)c(t))\,L(t) = \frac{(A(t)c(t))^{1-\theta}}{1-\theta} L(t) = A(0)^{1-\theta} L(0)\,e^{(1-\theta)gt+nt}\,\frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}$$

тогда получаем полезность домохозяйства (2.3)

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} u\left(\frac{C(t)}{L(t)}\right) L(t)\,\mathrm{d}t = A(0)^{1-\theta} L(0) \int_0^\infty e^{-\beta t}\,u(c(t))\,\mathrm{d}t,$$

которую надо максимизировать. Можно пренебречь положительнымыи постоянными множителями, вынесенными за знак интеграла, т.к. они не влияют на результат оптимизации. Перепишем задачу домохозяйства компактнее

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}\,u(c(t))\,\mathrm{d}t \to \max_{c\geq 0},$$

где $\beta = \rho - (1-\theta)g - n$, а $u(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$. [7]

2.7 Централизованный вариант задачи Рамсея

Рассмотрим задачу центрального планировщика, как будто вся экономика – одно большое домохозяйство,

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}\,u(c(t))\,\mathrm{d}t \to \max_{c(\cdot)}, \quad c(t) \geq 0,$$

для которого бюджетное ограничение в интенсивной форме имеет следующий вид

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n+\delta+g)\,k(t), \quad k(t) \geq 0,$$

где положительное потребление $c(t)$ выступает в качестве управления, которое выбирается центральным планировщиком оптимально среди кусочно-непрерывных функций.

Потребление $c(t)$ не ограничено сверху и может временно превышать выпуск $y(t) = f(k(t))$, т.е. капитал можно проедать, лишь бы он оставался неотрицательным $k(t) \geq 0$ в каждый момент времени $t > 0$. Так основное отличие от модели Солоу в том, что норма сбережения в модели Рамсея

$$s(t) \equiv \frac{Y(t)-C(t)}{Y(t)} = \frac{y(t)-c(t)}{y(t)} = \frac{\dot{k}(t) + (n+\delta+g)\,k(t)}{f(k(t))}$$

зависит от времени и может быть отрицательна $s(t) \in (-\infty, 1]$.

[7] Такая форма записи целевого функционала также верена для функции полезности $u(c) = \ln(c)$ с относительной несклонностью к риску $\theta = 1$, так что $\beta = \rho - n$.

2.7.1 Принцип максимума Понтрягина

Заметим, что если не было бы ограничения $k(t) \geq 0$, то задача свелась бы к максимизации подынтегрального выражения по потреблению в каждый отдельный момент времени, не зависимо от потребления в другие моменты времени. Конечно, в нашем случае такого максимума нет из-за всюду положительной производной функции полезности (не насыщаемость предпочтений). Но можно свести задачу нахождения оптимального потребления к нахождению максимума некой функции в каждый момент времени, не зависимо от других моментов времени. В этом и состоит принцип максимума, а такую функцию называют Гамельтонианом или функцией Понтрягина.[8] Функция Гамильтона-Понтрягина отображает приток богатства

$$\mathcal{H}(k, c, \lambda, \mu, t) = \mu\, e^{-\beta t}\, u(c) + \lambda\, (f(k) - c - (n + \delta + g)\, k)\,,$$

приток полезности, умноженный на неотрицательн цену μ, плюс приток капитала, умноженный на скрытые цены λ (shadow prices), зависящие от времени. Принцип максимума устанавливает для функции оптимального потребления $\hat{c}$ и соответствующей функции капиталла $\hat{k}$ существование таких скрытых цен $(\mu, \lambda) \neq 0$, где $\mu \geq 0$ – неотрицательная постоянная, что для всех моментов времени $t \geq 0$ выполнено условие максимума

$$\mathcal{H}(\hat{k}(t), \hat{c}(t), \lambda(t), \mu, t) = \max_{c} \mathcal{H}(\hat{k}(t), c, \lambda(), \mu, t),$$

а функция скрытых цен λ от времени удовлетворяет сопряженному уравнению

$$-\dot{\lambda}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k}(\hat{k}(t), \hat{c}(t), \lambda(t), \mu, t).$$

Решение λ удовлетворяет условию стремления приведенной скрытой стоимости капитала к нулю

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t)\hat{k}(t) = 0,$$

с необходимостью только при $\beta > 0$. [9]

Ввиду вогнустости функции Понтрягина $\mathcal{H}$ одновременно по k и c, можно рассмотреть достаточное условие оптимальности Мангасаряна, что оптимальная приведённая скрытая стоимоть капитала должна стремиться к минимуму

$$\liminf_{t\to\infty} \lambda(t) \left(k(t) - \hat{k}(t)\right) \geq 0,$$

[8] Мы будем называть эту функцию функцией Гамильтона-Понтрягина, т.к. Гамильтонианом в физике принято называть эту функцию на оптимальной траектории, т.е. с оптимальными значениями управления и соответствующими значениями переменной состояния.

[9] При $\beta = 0$ целевой функционал расходится, хотя этот случай тоже рассматриался экономистами, видимо, считающими безнравственным дисконтировать полезности будущих поколений. Оптимальное значение функционала можно сделать конечным если под интегралом вычесть из полезности её значение в пределе при $t \to \infty$, так что задача примет вид

$$\int_0^\infty (u(c(t)) - u(c_*)))\ \mathrm{d}t \to \max_{c\geq 0},$$

где c_* – стационарное значение к которому сходится оптимальное потребление. Тогда будут выполнены условия теоремы Мишеля (Michel P. On the transversality condition in infinite horizon optimal problems // Econometrica. 1982. V. 50. P. 975–985.), где в качетве условий трансверсальности выступает стремнение Гамильтониана к нулю

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{H}(\hat{k}(t), \hat{c}(t), \lambda(t), \mu, t) = 0.$$

Проверьте, следует ли отсуюда условие трансверсальности $\lim_{t\to\infty} \lambda(t)\hat{k}(t) = 0$.

где $k(t)$ – любые допустимые траектории капитала. Причём $\hat{k}(\cdot)$ – единственна ввиду строгой вогнутости $\mathcal{H}$ по (k, c). Из-за ограниченности значений капитала при заданном $k(0) = k_0$ в качестве достаточного условия оптимальности в задаче Рамсея можно записать стремление приведённых скрытых цен капитала к нулю

$$\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = 0,$$

которое тоже выполняется только при $\beta > 0$. [10]

Однако, случай $\beta = 0$ вполне возможен при положитеьной личной норме дисконтирования $\rho > 0$, т.к. $\beta = \rho - (1-\theta)g - n$. Из фазовой диаграммы можно показать, что единсвенная оптимальная траектория, которая может быть в задаче Рамсея при любом β, это траектория, стремящаяся к седловой точке $(k(t), c(t)) \to (k_*, c_*)$.

Заметим, что исходное уравнение тоже можно записать через функцию $\mathcal{H}$ как

$$\dot{\hat{k}}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}(\hat{k}(t), \hat{c}(t), \lambda(t), \mu, t).$$

Если в задаче Рамсея существует нетривиальное оптимальное решение, то есть функция потребления определена для всех моментов времени и строго положительна, то принцип максимума для этого решения должен выполняться в нормальной форме, $\mu > 0$. [11] Поэтому, без ограничения общности, можно считать $\mu = 1$.

2.7.2 Уравнение Эйлера–Лагранжа

Лагранжиан примет вид

$$\mathcal{L}(k, \dot{k}, t) = e^{-\beta t}\, u\Big(f(k) - \dot{k} - (n+\delta+g)\, k\Big)$$

Основное уравнение вариационного исчисления

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{k}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k}$$

Применяя это уравнение к данному Лагранжиану и поделив его обе части на $e^{-\beta t}u'(c(t))$, получаем то же самое уравнение

$$\beta - \frac{u''(c(t))\dot{c}(t)}{u'(c(t))} = f'(k(t)) - (n+\delta+g).$$

[10] Оптимизация расходящегося интеграла также имеет смысл в расширенном понятии обгоняющей оптимальности (overtaking optimality). Легко видеть, что при $\beta = 0$ для оптимальной траектории, сходящейся к $k_* > 0$, условия трансверсальности вида $\lim_{t\to\infty} \lambda(t)\hat{k}(t) = 0$ не выполняется, т.к. сопряженная переменная сходится к строго положительной константе, определяемой из условия максимума $\lambda_* = u'(c_*) > 0$. Также не выполяется и условие Мишеля $\lim_{t\to\infty} \mathcal{H}(\hat{k}(t), \hat{c}(t), \lambda(t), \mu, t) = 0$ из-за того, что интегрант целевого функционала не стремится к нулю при $\beta = 0$. Достаточные условия Мангасаряна и Эрроу тоже не выполняются при $\beta = 0$. Однако это не означает, что седловая траектория не оптимальна.

[11] Докажем от противного. Пусть $\mu = 0$. Тогда, максимизация функции

$$\mathcal{H}(k, c, \lambda, \mu, t) = \lambda\,(f(k) - c - (n+\delta+g)\,k)$$

по c при ограничении $c \geq 0$ дает конечные значения $\hat{c}$ только при $\lambda \leq 0$. Но, по теореме, $(\mu, \lambda) \neq 0$. Значит $\lambda < 0$. Но, тогда $\hat{c} \equiv 0$, что, очевидно, не оптимально.

Заметим, что в стационарном положении $c = f(k) - (n+\delta+g)\,k$ и $\beta = f'(k) - (n+\delta+g)$, следовательно оно не зависит от конкретного вида функции полезности, а лишь от θ, которое учавствует в β. Кроме того, из условия максимума долгосрочного потребления $\mathrm{d}c/\,\mathrm{d}k \equiv f'(k) - (n+\delta+g) = 0$ следует, что золотое правило выполняется лишь когда $\beta = 0$.

Учитывая, что $\beta = \rho - (1-\theta)g - n$ и относительная несколнность к риску постоянна и равна θ, получаем темп роста потребления на единицу эффективного труда:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{f'(k(t)) - \rho - \delta - \theta g}{\theta}.$$

Отсюда можно выразить темп прироста подушевого потребления $c(t)A(t)$:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} + \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} + g = \frac{f'(k(t)) - \rho - \delta}{\theta}.$$

То есть, в данном случае, темп прироста подушевого потребления зависит от темпов прироста населения и эффективности лишь посредством k.

Упражнение 2.1 *Покажите, что при $f(k) \equiv k^\alpha$ и при $\theta = \alpha$ оптимальное удельное потребление прямо пропорционально текущему уровню капиталовооруженности:*

$$c = \left(\delta\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + \frac{\rho}{\alpha} - n\right)k.$$

2.7.3 Траектория сбалансированного роста

Когда все переменные модели растут с постоянными темпами говорят что система находится на траектории сбалансированного роста (balanced-growth path). Для удобства анализа удельные переменные опреляют таким образом, чтобы на траектории сбалансированного роста они были стационарными, например: $\dot{c}(t) = 0$, $\dot{k}(t) = 0$. Поэтому такое состояние системы называют стационарным, а соответствующие величины переменных k_* и c_* стационарными значениями.

2.7.4 Правило Кейнса–Рамсея

Предельная норма трансформации (капитала) записывается в виде производной (по начальным условиям)

$$MRT(t,\tau) = \frac{\mathrm{d}k(t)}{\mathrm{d}k(\tau)} = z(t)$$

капиталовооруженности $k(s)$ в момент времени s по капиталовооруженности $k(\tau)$ в момент τ и определяется решением линеаризованного уравнения состояния с единичными начальными условиями:

$$\dot{z}(t) = \left(f'(k(t)) - (n+\delta+g)\right) z(t), \quad z(\tau) = 1.$$

Она показывает во сколько раз изменится (трансформируется) приращение капитала Δk в момент времени τ к моменту времени t в пределе при $\Delta k \to 0$.

Из-за того, что в задаче Рамсея полезность не зависит явно от капитала, сопряжённое уравнение

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t)\left(f'(k(t)) - (n+\delta+g)\right),$$

отличается от линеаризованного лишь знаком правой части. Известно, что когда два линейных однородных уравнения соотносятся таким образом, произведение их решений остаётся постоянным $\lambda(t)z(t) = const = \lambda(\tau)$ для всех моментов времени t. [12] Отсюда следует, что производная решения $k(t)$ по начальным условиям $k(\tau)$ равна отношению

$$\frac{\mathrm{d}k(t)}{\mathrm{d}k(\tau)} = \frac{\lambda(\tau)}{\lambda(t)}.$$

Из необходимого условия максимума (функции Гамильтона–Понтрягина) $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = 0$

$$e^{-\beta t}u'(c(t)) - \lambda(t) = 0,$$

$$e^{-\beta \tau}u'(c(\tau)) - \lambda(\tau) = 0,$$

получаем

$$MRT(t,\tau) = \frac{e^{-\beta \tau}u'(c(\tau))}{e^{-\beta t}u'(c(t))}.$$

В правой части этого уравнения стоит предельная норма замещения (потребления) по определению — отношение предельных мгновенных полезностей взятое на кривой безразличия:

$$e^{-\beta \tau}u(c(\tau)) + e^{-\beta t}u(c(t)) = const,$$

так как потребление оптимально и его перенос из одного момента времени в другой (при помощи трансформации капитала) не должен приводить к росту суммарной полезности. Взяв дифференциал, получаем

$$e^{-\beta \tau}u'(c(\tau))\,\mathrm{d}c(\tau) + e^{-\beta t}u'(c(t))\,\mathrm{d}c(t) = 0,$$

откуда запишем определение мгновенной нормы замещения в виде производной

$$MRS(t,\tau) = -\frac{\mathrm{d}c(t)}{\mathrm{d}c(\tau)} = e^{\beta(t-\tau)}\frac{u'(c(\tau))}{u'(c(t))}.$$

Оно показывает как относятся (в пределе $\Delta C \to 0$) изменения полезносей в момент τ и в момент t, если часть потребления ΔC перенести из одного момента времени в другой. [13]

Правило Кейнса–Рамсея: Предельная норма трансформации равна предельной норме замещения, $MRT(t,\tau) = MRS(t,\tau)$. [14]

[12] Домножив линеаризованное уравнение на $\lambda(t)$, сопряжённое уравнение на $z(t)$ и сложив полученные уравнения получаем $\dot{\lambda}(t)z(t) + \lambda(t)\dot{z}(t) = 0$, т.е. $(\lambda(t)z(t))^{\cdot} = 0$.

[13]

$$MRS(t,\tau) = \lim_{\Delta C \to 0}\frac{e^{-\beta t}u(c(t) - \Delta C)}{e^{-\beta \tau}u(c(\tau) + \Delta C)} = \lim_{\Delta C \to 0}\frac{e^{-\beta t}\frac{u(c(t)-\Delta C)}{-(-\Delta C)}}{e^{-\beta \tau}\frac{u(c(\tau)+\Delta C)}{\Delta C}} = -\frac{e^{-\beta t}u'(c(t))}{e^{-\beta \tau}u'(c(\tau))}$$

[14] Заметим, что уравнение Эйлера получается из правила Кейнса–Рамсея в пределе:

$$\lim_{\tau \to t}\frac{\mathrm{d}MRT(t,\tau)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\tau \to t}\frac{\mathrm{d}MRS(t,\tau)}{\mathrm{d}t}.$$

2.7.5 Обсуждение

Сглаживание потребления из-за убывающей предельной полезности $u'(C)$. Стационарное положение капиталовооруженности эффективного труда не превышает его же при золотом правиле в модели Солоу.

2.8 Децентрализованный вариант задачи Рамсея

2.8.1 Задача домохозяйства

Как и в централизованной модели домохозяйство максимизирует дисконтированную сумму полезностей своих членов

$$\int_0^\infty e^{-\beta t}\, u(c(t))\, \mathrm{d}t \to \max_{c \geq 0}.$$

Но теперь домохозяйство не распоряжается непосредственно всем производством а лишь может закупать активы на рынке, которые предоставляются фирмами. Активы домохозяйства $\mathcal{A}(t)$ изменяются с выплатой процентов по ставке $r(t)$, увеличиваются с получением зарплаты $W(t)$ и уменьшаются с потреблением $C(t)$:

$$\dot{\mathcal{A}}(t) = r(t)\mathcal{A}(t) + W(t)L(t) - C(t), \quad \mathcal{A}(0) = \mathcal{A}_0,$$

где $\mathcal{A}_0$ – начальные количество активов домохозяйства. Заметим, что мы не ограничиваем знак $\mathcal{A}(t)$. Отрицательные активы означают долг. Домохозяйство воспринимает процентную ставку $r(t)$ и зарплату $W(t)$ заданными, т.е. считает, что не может на них повлиять. Поэтому, чтобы у домохозяйства не возникло желание сразу взять бесконечный долг мы вводим *условие отсутствия пирамид* (no-Ponzi game condition)

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\int_0^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau} \mathcal{A}(t) \geq 0.$$

Переходя к удельным переменным на единицу эффективного труда

$$a(t) \equiv \frac{\mathcal{A}(t)}{A(t)L(t)}, \quad w(t) \equiv \frac{W(t)}{A(t)},$$

где $w(t)$ – плата за единицу эффективного труда, получаем

$$\dot{a}(t) = (r(t) - n - g)\, a(t) + w(t) - c(t), \quad a(0) = a_0.$$

Условие отсутствия пирамид примет вид

$$\lim_{t\to\infty} R(t)a(t) \geq 0, \quad R(t) = e^{-\int_0^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau + (n+g)t}.$$

Для краткости мы ввели функцию $R(t)$. Обратная функция $R(t)^{-1}$ совпадает с фундаментальным решением нашего линейного дифференциального уравнения, через которое записывается общее решение уравнения в форме Коши

$$a(t) = R(t)^{-1}\left(a_0 + \int_0^t R(\tau)\,(w(\tau) - c(\tau))\,\mathrm{d}\tau\right).$$

В результате получаем одно интегральное бюджетное ограничение

$$a_0 + \int_0^\infty R(t)\,(w(t) - c(t))\ \mathrm{d}t \geq 0.$$

Введя функцию Лагранжа как

$$L = \int_0^\infty e^{-\beta t}\,u(c(t))\,\mathrm{d}t + \lambda_0 \left(a_0 + \int_0^\infty R(t)\,(w(t) - c(t))\ \mathrm{d}t\right),$$

имеем условия оптимальности потребления $\hat{c}$

$$e^{-\beta t}\,u'(\hat{c}(t)) - \lambda_0 R(t) = 0,$$

где множитель Лагранжа $\lambda_0 \geq 0$, и т.н. условие дополняющей нежесткости

$$\lambda_0 \left(a_0 + \int_0^\infty R(t)\,(w(t) - \hat{c}(t))\ \mathrm{d}t\right) = 0.$$

Из условия стационарности следует что $\lambda_0 > 0$, т.к. $R(t) > 0$ и $u'(c(t)) > 0$ из-за предположения ненасыщаемости предпочтений. Тогда условия дополняющей нежесткости следует, что бюджетное ограничение выполняется как равенство

$$a_0 + \int_0^\infty R(t)\,(w(t) - \hat{c}(t))\ \mathrm{d}t = 0.$$

Действительно, иначе из-за ненасыщаемости предпочтений репрезентативного агента можно было бы увеличить полезность, увеличив потребление.
[15]

[15]Покажем как решать эту задачу через принцип максимума с функцией Гамильтона-Понтрягина

$$\mathcal{H}(a, c, \lambda, 1, t) = e^{-\beta t}\,u(c) + \lambda\,((r(t) - n - g)\,a + w(t) - c)$$

– приток полезности плюс неявная цена капитала, умноженная на приток капитала Условие максимума можно записать как

$$e^{-\beta t}\,u'(c(t)) - \lambda(t) = 0,$$

откуда следует что $\lambda(t) > 0$, т.к. $u'(c) > 0$ – ненасыщаемость предпочтений, а сопряженное уравнение

$$-\dot{\lambda}(t) = \lambda(t)\,(r(t) - n - g)$$

имеет решением простое выражение $\lambda(t) = R(t)\lambda_0$, где $\lambda_0 > 0$, т.к. $\lambda(t) > 0$ и $R(t) > 0$. Функция Гамильтона-Понтрягина вогнута (т.к. линейна) по переменной состояния (активам a) и строго вогнута по управлению (потреблению c). Следовательно, по теореме Мангасаряна, приведенные выше необходимые условия – достаточны для пар функций $(\hat{c}, \hat{a})$, если выполнено следующее условие типа трансверсальности

$$\liminf_{t\to\infty} \lambda(t)\,(a(t) - \hat{a}(t)) \geq 0,$$

где $a(t)$ – любые допустимые траектории, Условие отсутствия пирамид можно записать в более общем виде

$$\liminf_{t\to\infty} R(t)a(t) \geq 0,$$

домножив которое на $\lambda_0 \geq 0$, ввиду $\lambda(t) = R(t)\lambda_0$, получаем

$$\liminf_{t\to\infty} \lambda(t)a(t) \geq 0.$$

Пример 2.8.1 *Возьмем для простоты $u(c) = \ln(c)$, тогда $u'(c) = 1/c$ и из условия превого порядка получаем*

$$c(t) = \frac{e^{-\beta t}}{\lambda_0 R(t)} = \frac{1}{\lambda_0} e^{-\beta t} e^{\int_0^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau - (n+g)t} = \frac{1}{\lambda_0} e^{\int_0^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau - (\rho+g)t},$$

где мы учли, что $\beta = \rho - n$ Значение множителя Лагранжа λ_0 подбирается так, чтобы было выполнено бюджетное ограничение

$$a(0) + \int_0^\infty \left(R(t)w(t) - \frac{1}{\lambda_0} e^{-\beta t} \right) \mathrm{d}t = 0.$$

Если $\beta > 0$, то

$$\frac{1}{\lambda_0} = \beta \left(a_0 + \int_0^\infty R(t)w(t)\,\mathrm{d}t \right).$$

2.8.2 Задача фирмы

$$f'(k(t)) = r(t) + \delta, \quad f(k(t)) = w(t) + (r(t) + \delta)\,k(t).$$

Ввиду свойства постоянной отдачи от масштаба, из решения задачи фирмы следует, что в равновесии зарплата w и процентная ставка должны находиться r должны находится в определённом соотношении не зависимо от размера экономики.

2.8.3 Уравнения общего равновесия

1. Домохозяйства максимизируют полезность, считая заданными функции $r(\cdot)$, $w(\cdot)$ и $\tau(\cdot)$:

$$\beta - \frac{u''(c(t))\dot{c}(t)}{u'(c(t))} = r(t) - n - g.$$

2. Фирмы максимизируют текущую прибыль, считая заданными $r(\cdot)$ и $w(\cdot)$:

$$f'(k(t)) = r(t) + \delta, \quad f(k(t)) = w(t) + (r(t) + \delta)\,k(t).$$

3. Выполнены балансы на рынках:

Легко видеть, что при таком ограничении, достаточным условием оптимальности будет существование следующего предела

$$\lim_{t \to \infty} \lambda(t)\hat{a}(t) = 0.$$

(При насыщаемых предпочтениях может случиться, что $\lambda_0 = 0$.)

Чтобы показать необходимость полученного предела подставим в него выражение для $\hat{a}(t)$

$$\lambda_0 \left(a_0 + \int_0^\infty R(t)\,(w(t) - \hat{c}(t))\,\mathrm{d}t \right) = 0.$$

Это – неявная стоимость активов в бесконечности, которая не может быть меньше нуля из-за условия отсутствия пирамид и не может быть больше нуля, т.к. в этом случае можно было бы увеличить потребление, что противоречит ненасыщаемости предпочтений.

Последнее условие эквивалентно условию дополняющей нежесткости. Эти условия верны и в более общем случае, когда предпочтения могут быть насыщаемыми $u'(\hat{c}) = 0$, так что $\lambda_0 \equiv \lambda(t) \equiv 0$. Мы получили, что условия принципа максимума Понтрягина в данной задаче необходимы и достаточны для оптимальности. Это известный результат для задач оптимального управления с линейными системами.

(a) продукта: $\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (\delta + n + g)\,k(t)$, $k(0) = k_0 \geq 0$.

(b) труда: $L(t) = N(t)$, т.е. каждый житель домохозяйства постовляет на рынок единицу труда в единицу времени.

(c) капитала: $a(t) = k(t)$

Баланс на рынках означает равенство потоков соответствующих факторов. Однако, для капитала, кроме равенства потоков $\dot{a}(t) = \dot{k}(t)$, мы фактически требуем ещё и равенство начальных запасов $a(0) = k(0)$. Т.е. что весь капитал принадлежит домохозяйствам, и ничего кроме капитала им не принадлежит.

Утверждение 2.1 *Равновесная траектория в децентрализованной модели Рамсея единственна и совпадает с решением централизованной модели.*

Для доказательства надо показать, что уравнение Эйлера задачи домохозяйства совпадает с уравнением Эйлера централизованной задачи.

Глава 3

Модели с энодогенным ростом

Модели Солоу и Рамея предполагают возможность лишь экзогенного долгосрочного роста подушевого ВВП. А весь ВВП экономики должен расти с темпом не меньше темпа роста населения, что не согласуется с действительностью.

M. Frankel (1962), экономика состоит из N фирм с одинаковой производсвенной функцией

$$Y_j(t) = \bar{A}(t)\left(K_j(t)\right)^{\alpha}\left(L_j(t)\right)^{1-\alpha}$$

с общефакторной производительностью $\bar{A}$, зависящей от агрегированного капитала

$$\bar{A}(t) = A_0\left(\sum_{j=1}^{N} K_j(t)\right)^{\eta},$$

где $\eta > 0$, $\alpha \in (0,1)$ и $A_0 > 0$. Определим агрегированные капитал и выпуск в экономике:

$$K(t) = \sum_{j=1}^{N} K_j(t), \quad Y(t) = \sum_{j=1}^{N} Y_j(t),$$

а также капитал и выпуск на душу населения

$$k(t) = \frac{\sum_{j=1}^{N} K_j(t)}{\sum_{j=1}^{N} L_j(t)}, \quad y(t) = \frac{\sum_{j=1}^{N} Y_j(t)}{\sum_{j=1}^{N} L_j(t)}.$$

Если фирмы считают цены капитала не зависящими от своих решений, то они арендуют капитал в динаковых пропорциях к труду, т.к. их задачи оптимизации совпадают. Т.е. для всех j

$$k(t) = \frac{K_j(t)}{L_j(t)}, \quad y(t) = \frac{Y_j(t)}{L_j(t)}.$$

Поэтому для всей экономики верно

$$Y(t) = \bar{A}(t)\left(K(t)\right)^{\alpha}\left(L(t)\right)^{1-\alpha}.$$

Подставив сюда $\bar{A}(t) = A_0\left(K(t)\right)^{\eta}$, и считая количество труда постоянным и $\eta = 1-\alpha$ получаем агрегированный выпуск с постоянной отдачей от капитала в виде

$$Y(t) = AK(t),$$

где константа $A = A_0 L^{1-\alpha}$. Поэтому модели такого рода называют AK-моделями. Предельная производительность равна константе A, она не убывает в отличии от неоклассических моделей.

3.1 АК–модель с межвременной оптимизацией полезности

Ромер (Romer, 1986) разработал АК версию модели Рамсея, предположив внешние эффекты суммарного капитала в экономике на производительность каждой фирмы. Для простоты будем считать, что все фирмы одинаковы и нанимают единицу труда $L_j = 1$. Тогда капитал каждой фирме равен капиталовооруженности труда $K_j = k$. Выпуск фирмы $y(t) = \bar{A}(t)k(t)^{\alpha}$ определяется капиталом k и общей производительностью $\bar{A}(t)$, которая зависит от сумманого капитала K

$$\bar{A}(t) = A_0\,(K(t))^{\eta}\,, \quad K(t) := \sum_{j=1}^{N} K_j(t) = Nk(t).$$

Агрегированный выпуск Y определяется

$$Y(t) = Ny(t) = N\bar{A}(t)k(t)^{\alpha} = NA_0\,(K(t))^{\eta}\left(\frac{K(t)}{N}\right)^{\alpha} = AK(t)^{\alpha+\eta},$$

где константа $A = A_0 N^{1-\alpha}$. Рассмотрим три случая

Пусть владелец фирмы решает следующую задачу максимизации при $k(t) \geq 0$ и $c(t) \geq 0$:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho t}\,u(c(t))\,\mathrm{d}t \to \max_{c\geq 0}, \quad \dot{k}(t) = \bar{A}(t)k(t)^{\alpha} - c(t) - \delta k(t).$$

Предположим, что агенты имеют постоянную относительную несклонность к риску θ:

$$\theta = -\frac{C\,u''(C)}{u'(C)}, \text{ для любых } C \geq 0.$$

или, что то же самое, постоянную эластичность межвременного замещения потребления $1/\theta$??? Тогда уравнение Эйлера записывается следующим образом:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{\alpha\bar{A}(t)k(t)^{\alpha-1} - \delta - \rho}{\theta}.$$

Агент верно предвидит, что каждая фирма арендует одинаковое количество капитала $k(t)$, поэтому для него уравнение примет вид:

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{\alpha A_0 N^{\eta} k(t)^{\alpha+\eta-1} - \delta - \rho}{\theta}.$$

- Если $\alpha + \eta - 1 < 0$, то решение качественно не отличается от модели Рамсея, где отдача от капитала убывает.
- Если $\alpha + \eta - 1 > 0$, то решением будет врывной рост, что не реалистично.[1]
- Эндогенный долгосрочный рост наблюдается при $\alpha + \eta - 1 = 0$, что и будем предполагать в дальнейшем.

Тогда, из уравнения Эйлера следует постоянный темп прироста подушевого потребления

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{\alpha A_0 N^{\eta} - \delta - \rho}{\theta} \equiv g.$$

[1] $c = A_0 N^{\eta} k^{\alpha+\eta} - \delta k$, $\alpha A_0 N^{\eta} k^{\alpha+\eta-1} = \delta + \rho$

Следовательно $c(t) = e^{gt}c(0)$, и уравнение для капитала примет вид

$$\dot{k}(t) = (A_0N^\eta - \delta)\, k(t) - e^{gt}c(0), \quad k(0) = k_0 > 0.$$

Из решения этого уравнения, условиия $k(t) \geq 0$ и ненасыщаемости предпочтений $(u'(c) > 0)$ следует

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = g,$$

причём $c(0) = k(0)\,(A_0N^\eta - \delta - g)$. [2]

При $\alpha + \eta = 1$ агрегированный выпуск имеет вид $Y(t) = AK(t)$ или в интенсивной форме $y(t) = Ak(t)$, откуда следует, что темпы прироста подушевого ВВП, капиталовооруженности и подушевого потребления равны и постоянны:

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = g.$$

То есть, в AK-модели нет переходного процесса. Экономика сразу начинает расти с постоянным темпом, что не объясняет условную конвергенцию стран по подушевым показателям, в отличии от модели Рамсея. ??????????????

Заметим, что в централизованном варианте задача планировщика при $\alpha + \eta = 1$ выглядела бы

$$\int_0^\infty e^{-\rho t}\, u(c(t))\, \mathrm{d}t \to \max_{c \geq 0}, \quad \dot{k}(t) = A_0N^\eta k(t) - c(t) - \delta k(t).$$

И условие оптимальности (уравнение Эйлера) давало бы больший темп роста чем децентрализованный вариант

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{A_0N^\eta - \delta - \rho}{\theta} > \frac{\alpha A_0N^\eta - \delta - \rho}{\theta}.$$

Это говорит о динамической неэффективности решения децентрализованной модели, видимо из-за внешнего эффекта агрегированного капитала на общую производительность $\bar{A}(t) = A_0\,(K(t))^\eta$.

[2] Решение уравнения динамики капитала $k(t) = e^{(A_0N^\eta - \delta)t}\left(k(0) - c(0)\int_0^t e^{(g - A_0N^\eta + \delta)\tau}\,\mathrm{d}\tau\right)$, при предположении $g - A_0N^\eta + \delta < 0$, неотрицательно всюду если $c(0) \leq k(0)\,(A_0N^\eta - \delta - g)$, что должно выполняться как равенство потому что домохозяйство выбирает максимально возможное начальное потребление ввиду ненасыщаемости предпочтений. Так как оптимальный темп роста потребления постоянен и не зависит от выбора начального потребления, подушевое потребление в любой последующий момент времени будет тоже максимальным. Тогда $k(t) = k(0)\,e^{gt}$.

Предметный указатель

Литература

[1] Сакс Дж., Ларрен Ф, Макроэкономика. Глобальный подход, Москва: Дело, 1996.

[2] Мэнкью, Н.Г. Макроэкономика. Москва: Изд-во МГУ, 1994.

[3] Ромер, Д. Высшая макроэкономика Москва: Издательский дом ГУ ВШЭ, 2014.

[4] Оливье Бланшар, Стенли Фишер Лекции по макроэкономике Издательский дом “Дело” РАНХиГС, 2014.

[5] Морис Обстфельд, Кеннет С. Рогофф Основы международной макроэкономики. Учебник Издательский дом “Дело” РАНХиГС, 2015.

[6] Асемоглу, Д. Введение в теорию современного экономического роста: В 2 КН. Москва: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2018.

[7] Т.А. Агапова, С.Ф. Серегина Макроэкономика. Москва 2009.

[8] Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости «Наука» Москва 1966