МФК «Логический анализ языка»

Тема: Язык классической логики предикатов первого порядка.

Как уже говорилось на предыдущих лекциях, рассмотренный ранее язык классической логики высказываний не обладает достаточными выразительными возможностями для выявления логических форм и анализа внутренней структуры простых высказываний. Для этих целей необходим язык, позволяющий учитывать типы логических и нелогических терминов, входящих в состав простых высказываний, а также каким образом эти термины сочленяются между собой.

В данной лекции будет рассмотрен достаточно богатый формализованный язык – язык *классической логики предикатов первого порядка (КЛП)*, позволяющий детально выражать внутреннюю структуру простых высказываний. Данный язык является результатом определенной реконструкции естественного языка. В нём приводится в соответствие логическая форма высказываний с их знаковой формой, что не всегда имеет место в естественном языке.

В языке КЛП явно представимы рассмотренные на предыдущей лекции субъектно-предикатные структуры высказываний, от которых приходилось отвлекаться при работе в языке КЛВ. Алфавит языка КЛП содержит дополнительные нелогические, логические и технические символы, а в раздел правильно построенных выражений, в дополнение к имеющемуся типу (формуле), вводится новый вид выражений – терм. Обычно язык КЛВ рассматривают как результат некоторого упрощения языка КЛП.

Язык классической логики предикатов первого порядка, являясь формализованным языком, обладает всеми ранее перечисленными особенностями подобных языков и строится по стандартной схеме:

I. Алфавит.

а) Нелогические символы[1].

- *предметные (индивидные) переменные*, представляющие произвольный объект из заданной предметной области (универсума):
$x, y, z, x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$

- *предметные (индивидные) константы* – аналоги собственных имен естественного языка:
$a, b, c, d, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots$

- n-местные ($n \geq 1$) *предикаторные константы* (*предикаторы*). Они являются знаками свойств ($n = 1$) и отношений ($n > 1$) различной местности. При функциональном анализе языка предикаторы представляют собой знаки предметно-истинностных функций.
$P^n, Q^n, R^n, S^n, P_1^n, P_2^n, \ldots, Q_1^n, Q_2^n, \ldots, R_1^n, R_2^n, \ldots, S_1^n, S_2^n, \ldots$

- n-местные ($n \geq 1$) *предметно-функциональные константы* (*предметные функторы*). Они являются знаками предметно-предметных функций различной местности.
$f^n, g^n, h^n, f_1^n, f_2^n, \ldots, g_1^n, g_2^n, \ldots, h_1^n, h_2^n, \ldots$

[1] В алфавит языка КЛП иногда включают параметры для простых высказываний – *пропозициональные переменные*: $p, q, r, s, \ldots, p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots, r_1, r_2, \ldots, s_1, s_2, \ldots$
В нашем курсе этот вид нелогических символов языка КЛП мы выделять не будем.

б) Логические символы.

- *пропозициональные связки* (знаки истинносто-истинностных функций):
$\neg$, &, $\vee$, $\underline{\vee}$, $\equiv$, $\supset$.

- *кванторы*: $\forall$ (квантор общности), $\exists$ (квантор существования).

в) Технические символы: , ( )
запятая, а также левая и правая скобки.

II. Язык КЛП содержит два типа правильно построенных выражений – *термы* и *формулы*. Термы – это аналоги простых и сложных имен естественного языка, а формулы – предложений.

Терм:

1. Любая предметная переменная является термом.
2. Любая предметная константа является термом.
3. Если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы, а Φ^n - n-местная предметно-функциональная константа, то $\Phi^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является термом.
4. Ничто иное, кроме указанного в пп. 1-3, не является термом.

Формула:

1. Если $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – термы, а Π^n - n-местная предикаторная константа, то $\Pi^n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ является формулой
2. Если A и B – формулы, то выражения (A &B), $(A \vee B)$, $(A \underline{\vee} B)$, $(A \equiv B)$, $(A \supset B)$, $\neg A$ тоже являются формулами.
3. Если α – предметная переменная и A – формула, то выражения $\forall\alpha A$, $\exists\alpha A$ являются формулами.
4. Ничто иное, кроме указанного в пп.1-3, не является формулой.

Рассмотрим некоторые примеры выявления логической формы на языке КЛП.

Для термов (аналогов простых и сложных имен естественного языка):

Столица России
$f^1(a)$
где a – Россия, а одноместный функтор f^1 представляет одноместную предметно-предметную функцию, сопоставляющую каждому государству ровно один объект – его столицу.

Расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга
$h^2(b, c)$
где b – Москва, c – Санкт-Петербург, а двухместный функтор h^2 представляет предметно-предметную функцию, сопоставляющую паре объектов (городов) числовое значение (величину) расстояния между ними.

Расстояние от столицы России до Санкт-Петербурга
$h^2(f^1(a), c)$

Численность населения Москвы
$g^1(b)$
где одноместный функтор g^1 представляет одноместную предметно-предметную функцию, сопоставляющую каждому населенному пункту (городу) определенную числовую величину – количество его жителей.

Для формул (аналогов предложений естественного языка):

Москва является столицей
(**важно:** термин «столица» в данном примере указывает на свойство, класс объектов, к которому относится предмет)
$P^1(b)$
где термин «столица» есть одноместный предикатор P^1, представляющий одноместную предметно-истинностную функцию, приписывающую значение Истина объектам, являющимся столицами, а значение Ложь – всем остальным объектам.

Санкт-Петербург не является столицей
$\neg P^1(c)$

Население Москвы больше населения Санкт-Петербурга
(**важно:** при логическом анализе становится ясно, что сравниваются не населения городов, а их численные значения. Тогда корректная формулировка данного примера: *Численность населения Москвы больше численности населения Санкт-Петербурга*)
$Q^2(g^1(b), g^1(c))$
где термин «больше» есть двухместный предикатор Q^2, представляющий двухместную предметно-истинностую функцию, приписывающую значение Истина таким парам величин, где первая величина больше второй, а значение Ложь – всем остальным парам.

Москва является столицей и население Москвы больше населения Санкт-Петербурга (здесь мы уже имеем сложное высказывание, образованное из двух простых с помощью пропозициональной связки конъюнкция)
$(P^1(b) \ \& \ Q^2(g^1(b), g^1(c)))$

Используя язык КЛП, мы можем выявить логическую форму рассмотренных на предыдущей лекции атрибутивных и реляционных высказываний.

Для ***атрибутивных высказываний***:

* ***единичноутвердительные*** – высказывания вида "b есть P" в языке логики предикатов записывается в виде $P^1(b)$;
* ***единичноотрицательные*** – высказывания вида "b не есть P" в языке логики предикатов записываются в виде $\neg P^1(b)$;
* ***общеутвердительные*** – высказывания вида "Всякий S есть P в языке логики предикатов записываются в виде $\forall x(S^1(x) \supset P^1(x))$;
* ***общеотрицательные*** – высказывания вида "Всякий S не есть P" в языке логики предикатов записываются в виде $\forall x(S^1(x) \supset \neg P^1(x))$;
* ***частноутвердительные*** – высказывания вида "Некоторый S есть P" в языке логики предикатов записываются в виде $\exists x(S^1(x) \ \& \ P^1(x))$;
* ***частноотрицательные*** – высказывания вида "Некоторый S не есть P" в языке логики предикатов записываются в виде $\exists x(S^1(x) \ \& \ \neg P^1(x))$.

Пример для ***реляционных высказываний:***
«Некоторые студенты получили «отлично» на каждом экзамене».
Его логическая форма «Некоторые S, предмет b и все Q находятся в отношении R» в языке логики предикатов может быть выражена посредством формулы:

$$\exists x(S^1(x) \,\&\, \forall y(Q^1(y) \supset R^3(x,b,y)))$$

Упражнения:

1. Выявить логические формы следующих имен с использованием языка логики предикатов:
   а) Сократ,
   б) отец Сократа,
   в) отец отца Сократа,
   г) возраст Сократа,
   д) возраст отца Сократа,
   е) разница в возрасте между Сократом и его отцом.

2. Выявить логические формы атрибутивных высказываний в языке логики предикатов:
   а) Дон не относится к числу крупнейших европейских рек.
   б) Всякий порядочный человек честен.
   в) Отдельные озера не имеют пресной воды.
   г) Ни один бифштекс, приготовленный миссис Смит, не пережарен.
   д) Некоторые профессора могут не иметь докторской степени.

3. Выявить логические формы реляционных высказываний в языке логики предикатов:
   а) Главное здание МГУ не выше некоторых московских зданий.
   б) Некоторые люди уважают своего отца больше себя.
   в) Всякий боксер не сильнее какого-нибудь штангиста.
   г) Любой англичанин ценит Шекспира выше, чем какого бы то ни было современного драматурга.
   д) Некоторые судьи дали кому-то из американских гимнастов более низкие оценки, нежели каждому японскому гимнасту.