

МФК «Логический анализ языка»

Тема: Классическая логика высказываний.

На предыдущей лекции были рассмотрены категории сложных высказываний и, в общем виде, основания и принципы, на основе которых строится первая изучаемая в нашем курсе логическая теория – классическая логика высказываний (КЛВ).

При построении этой теории мы используем ряд упрощений:

- мы не анализируем внутреннюю структуру простых высказываний;
- анализируются только высказывания, не содержащие внешнего модального оператора и образующиеся из других высказываний с помощью пропозициональных связок (знаков истинностно-истинностных функций);
- при трактовке союзов естественного языка как пропозициональных связок мы теряем часть смыслов, связываемых с ними (напомню, что пропозициональная связка «материальная импликация» не передает условную связь, часто выражаемую союзом «если ..., то ...»), но в результате получаем строгий и довольно удобный аппарат для анализа;
- мы трактуем высказывания как знаки таких абстрактных объектов как Истина и Ложь (ранее мы договорились, что Истина и Ложь – это значения высказываний и выражающих их повествовательных предложений);
- если в естественных языках выделяют три семиотических аспекта (семантический, синтаксический и прагматический), то последний (прагматический), связанный с неопределенностью, смысловой неоднозначностью и отсутствием точных правил построения выражений естественного языка, мы устраняем.

Язык классической логики высказываний не имеет никаких неопределенностей, он содержит полный список исходных символов (алфавит), а также точные и эффективные правила образования его выражений, позволяющие для любой последовательности символов (упорядоченной n -ки) определить, является ли она выражением нашего языка или не является. Такие языки называют *формализованными языками*, служащими для записи логической формы.

Характерной особенностью языка КЛВ (а также языка классической логики предикатов первого порядка, который будет рассмотрен позже) является его экстенциональный характер: значения сложных выражений зависят от значений их составляющих. Для логики высказываний это означает, что истинностное значение сложного выражения зависит от истинностных значений составляющих его выражений.

Формализованные языки (и язык КЛВ в том числе) строятся по следующим принципам:

I. Задаётся алфавит (список исходных символов), содержащий нелогические (описательные/дескриптивные), логические и технические символы.

- а) Нелогические термины (символы, от конкретного содержания которых мы отвлекаемся).
- б) Логические термины (служат для структурирования мысли, осуществляют связь между нелогическими символами).

в) Технические символы (выполняют чисто синтаксическую роль).

II. Формулируются точные определения (точные правил построения) выражений данного языка.¹

Зададим язык классической логики высказываний:

I. Алфавит.

а) Нелогические символы.

В языке КЛВ только один вид таких символов – пропозициональные переменные (параметры для простых высказываний):

$p, q, r, s, \dots, p_1, p_2, \dots, q_1, q_2, \dots, r_1, r_2, \dots, s_1, s_2, \dots$

б) Логические символы.

К ним в языке КЛВ относятся пропозициональные связки (знаки истинносто-истинностных функций):

$\neg, \&, \vee, \underline{\vee}, \equiv, \supset$.

в) Технические символы:

левая и правая скобки (и)

II. В языке КЛВ имеется только один тип правильно построенных выражений – формулы.

Зададим точное определение формулы:

1. Любая пропозициональная переменная (п. а)) является формулой.
2. Если A и B – формулы, то выражения $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \underline{\vee} B)$, $(A \equiv B)$, $(A \supset B)$, $\neg A$ тоже являются формулами.
3. Ничто иное, кроме указанного в п.1 и п.2, не является формулой.

Используя данное эффективное определение не составит никакого труда определить для любой последовательности символов, является ли она формулой языка КЛВ, или не является.

Упражнение 1:

Определить, являются ли следующие последовательности символов формулами:

- а) $\neg(\neg p)$, б) $\neg(\neg p \vee \neg q)$, в) $p \& q \vee r$, г) $(p \& q) \vee r$,
д) $\neg(pq)$, е) $\neg\neg\neg p$, ж) $(p \neg \vee \neg q)$, з) $(A \& B)$.

Мы задали язык классической логики высказываний, служащий для выявления логической формы на уровне простых высказываний. Выявив логическую форму, мы можем перейти к решению вопроса о формальной правильности или неправильности рассуждения. Для этого нам необходимо придать знакам языка значения, то есть осуществить их *интерпретацию*. При этом логические термины получают единую и постоянную для данного языка интерпретацию, а нелогические термины

¹ Данная процедура осуществляется с помощью индуктивного определения. Определения этого типа распадается на три части: в первой даётся перечень элементарных объектов; во второй указываются способы построения объектов; в третьей – фиксируется исчерпанность объектов первой и второй частями определения.

(пропозициональные переменные в составе формул, а также сами формулы) могут получать различные интерпретации. Данные вопросы решаются при построении *логических теорий*.

Принципы построения логических теорий:

1. Задаём язык теории.
2. Логическая теория всегда строится в рамках некоторого формализованного языка.
3. В этой теории указываются возможные интерпретации нелогических символов языка.
4. Задаются точные значения логических терминов.
5. Среди всех выражений языка выделяется класс законов данной теории.
6. Дается понятие логического следования в этой теории. Данное понятие необходимо для того, чтобы оценивать правильность или неправильность умозаключений.

Классическая логика высказываний строится по указанным принципам:

1. Язык КЛВ нами был задан выше.
2. Пропозициональным переменным (единственному виду нелогических символов) в качестве предметных значений приписываются объекты из множества $\{И, Л\}$, где И – истина, а Л – ложь. При этом каждой пропозициональной переменной в каждом случае интерпретации приписывается ровно одно из указанных значений (т.е. значение не может не быть приписано, и не может быть приписано оба значения).

Таким образом, существует две допустимых интерпретации для каждой отдельно взятой пропозициональной переменной:

- интерпретация, сопоставляющая ей значение И;
- интерпретация, сопоставляющая ей значение Л.

Понятие интерпретации также распространяется на случаи, когда значения сопоставляются не одной, а некоторому числу n ($n \geq 1$) пропозициональных переменных. Число всех возможных наборов n переменных равно 2^n . Итак, для одной переменной мы имеем две интерпретации, для двух – четыре, для трех 8 и т.д.

г		q	г		p	q	г
и		и	и		и	и	и
л		и	л		и	и	л
		л	и		и	л	и
		л	л		и	л	л
					л	и	и
					л	и	л
					л	л	и
					л	л	л

3. Задать точные значения пропозициональных связок (единственному типу логических терминов языка КЛВ) – значит сопоставить им соответствующую функцию истинности.

Эта процедура была нами осуществлена на предыдущей лекции.

A	$\neg A$
И	Л
Л	И

A	B		$(A \& B)$	$(A \vee B)$	$(A \underline{\vee} B)$	$(A \equiv B)$	$(A \supset B)$
И	И		И	И	Л	И	И
И	Л		Л	И	И	Л	Л
Л	И		Л	И	И	Л	И
Л	Л		Л	Л	Л	И	И

4. Классом законов данной теории будет класс формул, истинных при любых наборах значений, входящих в них пропозициональных переменных (то есть при любых интерпретациях). Эти формулы истинны исключительно в силу своей логической формы, вне зависимости от состояния дел в мире. Такие формулы называют *тождественно-истинными формулами*.

Формулы, ложные при любых интерпретациях, называются *тождественно-ложными*.

И наконец, существуют формулы, которые при одних интерпретациях принимают значение Истина, а при других – значения Ложь. Такие формулы будем называть *собственно-выполнимыми*.

Непересекающиеся классы *тождественно-истинных*, *тождественно-ложных* и *собственно-выполнимых* формул исчерпывают весь класс формул языка КЛВ.

Так, например, формул $((p \supset q) \vee (q \supset p))$ является тождественно-истинной, а её отрицание $\neg((p \supset q) \vee (q \supset p))$ тождественно-ложной.

Формула $\neg(\neg p \& q)$ является собственно-выполнимой.

p	q		$((p \supset q) \vee (q \supset p))$	$\neg((p \supset q) \vee (q \supset p))$	$\neg(\neg p \& q)$
И	И		И И И	Л И	И Л Л И
И	Л		Л И И	Л И	И Л Л Л
Л	И		И И Л	Л И	Л И И И
Л	Л		И И И	Л И	И И Л Л

Упражнение 2:

Определить табличным способом, какими - тождественно-истинными, тождественно-ложными, или собственно-выполнимыми являются данные формулы:

- а) $\neg(p \supset p)$, б) $((\neg p \supset q) \& \neg(q \vee p))$, в) $(\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \& \neg q))$,
г) $((p \vee \neg q) \supset (q \& r))$, д) $((p \supset q) \& (p \supset r)) \supset ((\neg q \vee \neg r) \supset p)$.

Заданные нами понятия тождественно-истинной, тождественно-ложной и собственно-выполнимой формулы дают возможность оценивать сложные высказывания естественного языка. Мы можем решить вопрос, является ли высказывание логически детерминированным (его значение определяется только его логической формой), или нет (его значение зависит от фактического положения дел).

Последние высказывания называют *логически недетерминированными*, их логическая форма является собственно-выполнимой формулой.

К классу логически детерминированных высказываний отнесем *логически истинные* (их логическая форма является тождественно-истинной формулой) и *логически ложные* (их логическая форма представляет тождественно-ложную формулу) высказывания.

Упражнение 3:

Установить, являются ли следующие высказывания логически истинными, логически ложными или логически недетерминированными:

- а) Либо Иван любит Марью, но она его не любит, либо Марья любит Ивана, но он её не любит.
- б) Число делится на 2 или не делится на 3, если и только если неверно, что когда оно делится на 3, то делится и на 2.
- в) Если сложное высказывание не относится ни к конъюнктивным, ни к дизъюнктивным, ни к имплицативным, то нельзя сказать, что оно конъюнктивное или имплицативное.

5. Зададим понятие логического следования.

Из множества формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ *логически следует* формула B , если и только если **не** существует интерпретации, при которой формулы $A_1, A_2, \dots, A_n$ одновременно принимают значение Истина, а формула B принимает значение Ложь. Эквивалентным образом: при любой интерпретации, при которой $A_1, A_2, \dots, A_n$ одновременно принимают значение истина, формула B тоже примет значение Истина.

Тогда, из множества формул $A_1, A_2, \dots, A_n$ *логически не следует* формула B , если и только если существует интерпретации, при которой формулы $A_1, A_2, \dots, A_n$ одновременно принимают значение Истина, а формула B принимает значение Ложь.

Теперь можно сформулировать механизм проверки правильности умозаключений. Во-первых, необходимо выявить логическую форму умозаключения. Во-вторых, проверить наличие логического следования между формулами посылок ($A_1, A_2, \dots, A_n$) и формулой заключения (B).

Умозаключение называется правильным тогда и только тогда, когда из его посылок логически следует заключение (истинности посылок *формально* гарантирует, что заключение окажется истинным).

Умозаключение неправильно в том случае, когда из его посылок заключение логически не следует (истинность посылок не гарантирует, что заключение окажется истинным).

Построение классической логики высказываний на этом завершено.

В качестве примера проверим следующее умозаключение:

Если Мария научится доказывать теоремы, то получит по геометрии «отлично». Но доказывать теоремы она не сможет научиться. Следовательно, по геометрии «отлично» не получит.

Выпишем простые суждения:

p – Мария научится доказывать теоремы

q – Мария получит по геометрии «отлично»

Выявим форму данного умозаключения:

$(p \supset q), \neg p$

$\neg q$

Построим совместную таблицу истинности для выписанных трех формул:

p	q		$(p \supset q)$	$\neg p$	$\neg q$
И	И		И	Л	Л
И	Л		Л	Л	И
Л	И		И	И	Л
Л	Л		И	И	И

Видим, что есть строчка набор значений <Л, И> (строчка в таблице), при котором формулы $(p \supset q)$ и $\neg p$, представляющие посылки, Истинны, а формула $\neg q$, представляющая заключение, Ложна. В таком случае, логическое следование места не имеет. Умозаключение является неправильным.

Рассмотрим умозаключение:

Если Мария научится доказывать теоремы, то получит по геометрии «отлично». Но по геометрии «отлично» она не получит. Следовательно, доказывать теоремы она не сможет научиться.

Его форма:

$(p \supset q), \neg q$

$\neg p$

Построим таблицу:

p	q		$(p \supset q)$	$\neg q$	$\neg p$
И	И		И	Л	Л
И	Л		Л	И	Л
Л	И		И	Л	И
Л	Л		И	И	И

Видим, что **нет** такой интерпретации (строчки в таблице), при которой формулы $(p \supset q)$ и $\neg q$, представляющие посылки, Истинны, а формула $\neg p$, представляющая заключение, Ложна. В таком случае, имеет место логическое следование и умозаключение является правильным.

Важно: умозаключение правильное не потому, что есть строчка, где истинны и посылки, и заключение, а потому, что **нет** строчки, в которой посылки истинны, а заключение ложно. В правильных умозаключениях «сохраняется истинность» от посылок к заключению.

Упражнение 4:

Осуществить проверку умозаключений табличным способом:

- а) Если тело является кристаллическим, то оно имеет определенную температуру плавления. Данное тело не является кристаллическим, поскольку оно не имеет определенной температуры плавления.
- б) Если философ является последовательным материалистом, то он признает познаваемость мира. Если философ признает познаваемость мира, то он не является агностиком. Следовательно, если философ не является последовательным материалистом, то он агностик.
- в) Если человек говорит неправду, то он заблуждается или сознательно вводит в заблуждение других. Этот человек говорит неправду, но явно не заблуждается. Следовательно, он сознательно вводит в заблуждение других.
- г) Если человек удовлетворен работой и счастлив в семейной жизни, то у него нет причин жаловаться на судьбу. У этого человека есть причина жаловаться на судьбу. Значит, он удовлетворен работой, но не счастлив в семейной жизни, либо счастлив в семейной жизни, но не удовлетворен работой.
- д) Множества бывают пустыми, единичными или бесконечными. Множество Вузов Москвы не пусто и не единично. Следовательно, их число бесконечно.