

МФК «Логический анализ языка»

Тема: Функциональный анализ языка

Лекция 2.

Виды функций

Функции можно подразделять на виды в зависимости от того, *какого типа объекты являются их возможными аргументами и возможными значениями*.

В логике выделяют два исходных типа объектов:

- (1) **индивиды** – отдельно взятые, единичные предметы – возможные значения *имен*;
- (2) **истинностные оценки** – Истина и Ложь – возможные значения *повествовательных предложений*.

С учетом этого различия выделяют следующие *простейшие типы функций*:

- **предметно-предметные** – функции, возможными аргументами и значениями которых являются индивиды (предметы);
- **предметно-истинностные** – функции, возможными аргументами которых являются индивиды, а возможными значениями истинностные оценки;
- **истинностно-истинностные** – функции, возможными аргументами и значениями которых являются истинностные оценки.

Предметно-предметные (или просто **предметные**) функции

Область определения таких функций – это множество индивидов или множество кортежей, составленных из индивидов. Область значений функции – множество индивидов.

Приведенные ранее (в Лекции 1) в качестве примеров функции (1) – (5) являются предметными.

Аналитическое представление предметной функции называется **именной формой**.
Примеры именных форм:

- (1) «столица x »,
- (2) «государство, на территории которого расположен x »,
- (3) « x^2 »,
- (4) « $x + y$ »,
- (5) «результат, полученный x на ЕГЭ по y ».

В результате подстановки в именную форму знаков аргументов (т.е. имен) вместо переменных получается новое имя, например,

(1) при подстановке в форму «столица x » вместо переменной x имени «Россия» получаем новое имя – «столица России» (денотатом этого имени является город Москва);

(2) при подстановке в форму «государство, на территории которого расположен x » вместо переменной x имени «Рязань» получаем новое имя – «государство, на территории которого находится Рязань» (денотатом этого имени является государство Россия);

(3) при подстановке в форму « x^2 » вместо переменной x имени «5» получаем новое имя – « 5^2 » (денотатом этого имени является число 25);

(4) при подстановке в форму « $x + y$ » вместо переменной x имени «5», а вместо переменной y имени «3» получаем новое имя – «5+3» (денотатом этого имени является число 8);

(5) при подстановке в форму «результат, полученный x на ЕГЭ по y » вместо переменной x имени «Петров», а вместо переменной y имени «математика» получаем новое имя – «результат, полученный Петровым на ЕГЭ по математике» (денотатом этого имени является количество баллов, набранных Петровым на ЕГЭ по математике, например, 90 баллов).

Знак предметной функции называется *предметным функтором*.

Таким образом, выражения языка «столица», «государство, на территории которого расположен...», « 2 », «+», «результат, полученный ... на ЕГЭ по ...» и им подобные – это предметные функторы.

Предметно-истинностные функции

Область определения таких функций – это множество индивидов или множество кортежей, составленных из индивидов. Область значений функции – множество истинностных оценок, т.е. множество, содержащее два элемента – Истину и Ложь.

Примеры:

(7) Рассмотрим функцию, аналитическое представление которой таково:

x электропроводен,

где переменная x пробегает по множеству веществ.

Возможными аргументами этой функции являются отдельные вещества: медь, железо, цинк, олово, сера, вода, спирт, кислород и т.д. А что является возможными значениями функции? Подставив вместо переменной x в форму « x электропроводен» имя «цинк» получим выражение:

Цинк электропроводен.

Это повествовательное предложение. Его значением является Истина. Поэтому можно считать, что наша функция цинку ставит в соответствие Истину.

Подставим теперь вместо переменной x в форму « x электропроводен» имя «кислород». Получим другое повествовательное предложение:

Кислород электропроводен.

Это предложение ложно. Значит, наша функция кислороду ставит в соответствие Ложь.

Таким образом, возможными значениями функции являются Истина и Ложь. Сама функция каждому электропроводному веществу сопоставляет Истину, а каждому неэлектропроводному – Ложь.

(8) Рассмотрим функцию, аналитическое представление которой таково:

x больше y ,

где переменные x и y пробегает по множеству чисел.

Возможными аргументами этой функции являются отдельные числа, а область определения представляет собой множество *пар* чисел. Это *двухместная* функция.

Подставим в форму « x больше y » вместо переменной x имя «5», а вместо y имя «3». Получим *истинное* повествовательное предложение:

5 больше 3.

Если в ту же форму вместо переменной x подставить имя «3», а вместо y имя «5», то получим ложное предложение:

3 больше 5.

Таким образом, паре чисел $\langle 5, 3 \rangle$ данная функция сопоставляет объект Истина, а паре $\langle 3, 5 \rangle$ объект Ложь. В общем случае, эта функция сопоставляет паре чисел Истину, если первое число пары на самом деле больше второго, и сопоставляет Ложь, если первое число пары меньше или равно второму.

(9) Рассмотрим функцию, аналитическое представление которой таково:

x находится между y и z ,

где переменные x , y и z пробегает, например, по множеству городов.

Возможными аргументами этой функции являются отдельные города, а область определения представляет собой множество *троек* городов. Это *трехместная* функция.

Подставим в форму « x находится между y и z » вместо переменной x имя «Москва», вместо y имя «Тверь», а вместо z имя «Рязань». Получим *истинное* повествовательное предложение:

Москва находится между Тверью и Рязанью.

Если в ту же форму вместо переменной x подставить имя «Тверь», вместо y имя «Рязань», а вместо z имя «Москва», то получим *ложное* предложение:

Тверь находится между Рязанью и Москвой.

Таким образом, тройке городов $\langle \text{Москва, Тверь, Рязань} \rangle$ данная функция сопоставляет объект Истина, а паре $\langle \text{Тверь, Рязань, Москва} \rangle$ объект Ложь. В общем случае, эта функция сопоставляет тройке городов Истину, если первый город из этой тройки на самом деле находится между вторым и третьим, в противном случае функция тройке городов сопоставляет Ложь.

Аналитическое представление предметно-истинностной функции называется ***пропозициональной (высказывательной) формой***. Если вместо переменных подставить в нее знаки аргументов (т.е. имена), получается повествовательное предложение.

Знаками предметно-истинностных функций являются ***предикаторы***.

Знаком функции из примера (7) является одноместный предикатор «электропроводный», знаком функции из примера (8) двухместный предикатор «больше», знаком функции из примера (9) трехместный предикатор «находится между».

Связь между предметными и предметно-истинностными функциями:

Каждой n -местной предметной функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ соответствует $n+1$ -местная предметно-истинностная функция « y есть $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ».

Примеры:

– одноместной предметной функции «рост x », где x пробегает по множеству людей, соответствует двухместная предметно-истинностная функция « y – рост x », где y пробегает по множеству величин длины;

– двухместной предметной функции сложения « $x + y$ » соответствует трехместная предметно-истинностная функция «сумма» – « z есть сумма x и y ».

Истинностно-истинностные функции (или просто ***функции истинности***)

И возможными аргументами, и возможными значениями таких функций являются истинностные оценки Истина и Ложь.

В аналитическом представлении таких функций используют не предметные переменные $x, y, z, x_1, \dots$, пробегающие по множествам индивидов (предметов), а особые, *пропозициональные переменные*, пробегающие по множеству истинностных оценок (множеству возможных значений повествовательных предложений) – $p, q, r, s, p_1, \dots$

Примеры:

(10) Рассмотрим одноместную функцию, аналитическое представление которой таково:

Неверно, что p .

Подставим вместо пропозициональной переменной p любое истинное предложение, например, «Земля вращается вокруг Солнца». В результате получаем ложное предложение

Неверно, что Земля вращается вокруг Солнца.

Подставим в ту же форму вместо p любое ложное предложение, например, «Солнце вращается вокруг Земли». В результате получаем истинное предложение

Неверно, что Солнце вращается вокруг Земли.

Таким образом, эта функция Истине сопоставляет Ложь, а Лжи сопоставляет Истину. Знаком этой функции является выражение «неверно, что» – внешняя, пропозициональная одноместная связка. Эту функцию называют в логике *отрицанием*.

(11) Рассмотрим двухместную функцию, аналитическое представление которой таково:

p и q .

Подставим вместо пропозициональных переменных p и q любые истинные предложения, например, «Земля – планета» и «Марс – планета». В результате получаем истинное предложение

Земля – планета, и Марс – планета.

Подставим в ту же форму вместо p истинное предложение «Земля – планета», а вместо q ложное предложение «Луна – планета». В результате получаем ложное предложение

Земля – планета, и Луна – планета.

Аналогичный результат (ложное предложение) получим при подстановке вместо p ложного, а вместо q истинного предложения, например,

Солнце – планета, и Марс – планета.

а также при подстановке вместо обеих переменных ложных предложений, например,

Солнце – планета, и Луна – планета.

Таким образом, эта двухместная функция паре <Истина, Истина> сопоставляет Истину, а остальным парам истинностных значений (<Истина, Ложь>, <Ложь, Истина>, <Ложь, Ложь>) сопоставляет Ложь. Данную функцию называют в логике *конъюнкцией*. Знаком этой функции в естественном языке является союз «и» («а», «но», «а также», «как..., так и») – внешняя, пропозициональная двухместная связка.

(12) Рассмотрим двухместную функцию, аналитическое представление которой таково:

p или q .

Если вместо пропозициональных переменных p и q подставить два произвольных ложных предложения, например, «Солнце – планета» и «Луна – планета», то получим ложное предложение

Солнце – планета, или Луна – планета.

Если же хотя бы одно из предложений, подставляемых вместо переменных p и q , истинно, то полученное сложное предложение также окажется истинным.

Таким образом, эта двухместная функция паре <Ложь, Ложь> сопоставляет Ложь, а остальным парам истинностных значений (<Истина, Истина>, <Истина, Ложь>, <Ложь, Истина>) сопоставляет Истину. Данную функцию называют в логике *дизъюнкцией*. Знаком этой функции в естественном языке является союз «или» – внешняя, пропозициональная двухместная связка.

Знак истинностно-истинностной функции называется ***истинностно-функциональной связкой***.

Подведем некоторые итоги.

Мы выделили три простейших вида функций (предметные, предметно-истинностные и функции истинности) и два типа их возможных аргументов (индивиды и истинностные оценки). Кроме того, мы установили, с помощью каких выражений эти функции и их аргументы представляются в языке. По сути, в рамках функционального подхода мы выделили пять категорий языковых выражений:

1. Имена – знаки индивидов;
2. Повествовательные предложения – знаки Истины и Лжи;
3. Предметные функторы – знаки предметных функций;
4. Предикаторы – знаки предметно-истинностных функций;
5. Истинностно-функциональные связки – знаки функций истинности.

Еще раз обратим внимание на ***синтаксическую роль*** функторов (знаков функций) разных типов:

Предметные функторы образуют из имен имена.

Предикаторы образуют из имен повествовательные предложения.

Истинностно-функциональные связки образуют из повествовательных предложений повествовательные предложения.

Задание для самоконтроля

Определить местность функции, указать области ее аргументов, область определения и область значений функции, установить, к какому виду эта функция относится.

- | | |
|--|--------------------------------|
| (а) возраст x ; | (б) x – пенсионер; |
| (в) x старше y ; | (г) расстояние от x до y ; |
| (д) расстояние от x до y равно z ; | (е) если p , то q . |

Изложение обязательного материала по данной теме закончено. Далее следует изложение дополнительного материала.

Функциональный подход может быть распространен и на другие виды языковых выражений.

Помимо функций простейших типов существуют функции, возможными аргументами которых являются не индивиды, не истинностные оценки, а *другие функции*.

Таковой, например, является функция суперпозиции в математике (суперпозицией функции F_1 с областью определения M и областью значений N и функции F_2 с областью определения N и областью значений K называется функция F_3 с областью определения M и областью значений K такая, что каждому элементу a множества M она ставит в соответствие тот объект, который функция F_2 ставит в соответствие значению функции F_1 от аргумента a . Так, суперпозиция функций прибавления 1 и возведения в квадрат ставит в соответствие $1 - 4$, $2 - 9$, $3 - 16$ и т.д.

Рассмотрим несколько примеров выражений языка, которые можно трактовать в качестве знаков такого рода функций.

(13) Попробуем определить, знаком какой функции является термин «очень» в контекстах типа «очень умный». «Умный» – это одноместный предикатор, знак функции, которая умным людям сопоставляет Истину, а неумным Ложь. «Очень умный» – это тоже одноместный предикатор, знак функции, сопоставляющей очень умным Истину, а всем другим Ложь. Значит, термин «очень» образует из одноместного предикатора одноместный предикатор. С семантической точки зрения, и аргументами, и возможными значениями функции, представленной словом «очень», являются одноместные предметно-истинностные функции.

(14) Попробуем определить, знаком какой функции является внутренняя связка «есть» в контекстах типа «Медь есть металл». «Медь» – это имя, знак определенного вещества. «Металл» – это одноместный предикатор, знак функции, которая металлам сопоставляет Истину, а всем другим веществам Ложь. А итоговая конструкция «Медь есть металл» – это повествовательное предложение, значением которого является Истина. Таким образом, связка «есть» в данном контексте из имени и одноместного предикатора образует предложение. С семантической точки зрения, первыми возможными аргументами рассматриваемой функции являются индивиды, вторыми аргументами – предметно-истинностные функции, а возможными значениями – Истина и Ложь.

(15) Попробуем определить, знаками каких функций являются кванторы в контекстах типа «Всякий умён», «Кто-то умён». «Умный» – это одноместный предикатор, а итоговая языковая конструкция – это повествовательное предложение. Таким образом, кванторы «всякий» и «кто-то» в указанных контекстах образуют из предикатора предложение. С семантической точки зрения, возможными аргументами функций, представленных кванторами, являются предметно-истинностные функции, а возможными значениями – Истина и Ложь.

(16) Попробуем определить, знаками каких функций являются операторы определенной и неопределенной дескрипции «тот... который» и «некий...». Рассмотрим выражение «некий писатель». Это имя (правда, с неопределенным денотатом). «Писатель» – это одноместный предикатор, знак функции, которая каждому писателю ставит в соответствие Истину, а любому другому человеку – Ложь. Таким образом, слово «некий» образует из предикатора имя. С семантической точки зрения, возможными аргументами функций, представленных операторами дескрипций, являются предметно-истинностные функции, а возможными значениями индивиды.

Функциональный подход к выражениям естественного языка позволяет построить строгую *иерархию их категорий*.

При этом выделяются три типа категорий:

- (i) категория *имен*, т.е. знаков индивидов (ей присваивается тип n),
- (ii) категория *повествовательных предложений*, т.е. знаков истинностных оценок (ей присваивается тип s),
- (iii) категории *функторов*, т.е. знаков функций.

Каждому функтору присваивается своя категория, представляющая собой дробь, в знаменателе которой последовательно указываются категории знаков возможных аргументов данной функции, а в числителе – категория знака значения функции.

Примеры:

$\frac{n}{n}$ – категория одноместного предметного функтора («столица», «рост»);

$\frac{s}{ss}$ – категория двухместной истинностно-функциональной связки («и», «или»);

$\frac{s}{nnn}$ – категория трехместного предикатора («находится между»);

$\frac{s/n}{s/n}$ – категория, к которой относится термин «очень» в контекстах вида «очень умный»;

$\frac{s}{n \frac{s}{n}}$ – категория связки «есть» в контекстах вида «Медь есть металл»;

$\frac{s}{s/n}$ – категория кванторов;

$\frac{n}{s/n}$ – категория операторов определенной и неопределенной дескрипции.