

МФК «Логический анализ языка»

Тема: Функциональный анализ языка

Лекция 1.

В современной логике широко распространен так называемый *функциональный подход* к анализу естественного языка.

В соответствии с этим подходом, языковые выражения рассматриваются *либо как знаки функций, либо как знаки аргументов этих функций*.

По существу, в основе функционального подхода лежит следующая *онтологическая предпосылка*: всё в мире есть либо функция, либо возможный аргумент функции.

В рамках функционального подхода удастся построить *строгую иерархию семантических категорий* выражений естественного языка. Для этого требуется выяснить (а) какие имеются типы функций; (б) к каким типам относятся их аргументы.

Понятие функции

В собственном (узком) смысле слова, *функция* есть отображение, которое каждому элементу одного множества ставит в соответствие ровно один элемент второго множества.

При этом первое множество называют *областью определения функции*, а второе – *областью значений* (или *областью изменения*) функции.

Иногда функцию трактуют более широко: как *любое* отображение, сопоставляющее элементам одного множества элементы второго.

Мы же под функцией будем понимать *всюду определенное* и *однозначное* отображение. *Всюду определенным* называют отображение, которое каждому элементу области определения нечто ставит в соответствие. Однозначным называют отображение, которое никакому элементу области определения не ставит в соответствие более одного объекта.

Примеры функций

(1) отображение, которое государствам сопоставляет их столицы.

Например, России эта функция сопоставляет Москву, Франции – Париж, Германии – Берлин и т.д.

Областью определения этой функции (ООФ) является множество государств, а областью значений функции (ОЗФ) множество городов.

Данное отображение первого множества на второе действительно является функцией, поскольку оно каждому государству ставит в соответствие ровно один город (его столицу).

(2) отображение, которое городам сопоставляет государства, на территории которых эти города находятся.

Например, эта функция Москве сопоставляет Россию, Туле – тоже Россию, Парижу и Лиону – Францию и т.д.

ООФ – множество городов, ОЗФ – множество государств.

Разным городам может быть сопоставлено одно и то же государство, но для функций это допустимо.

А вот обратное отображение, которое государству ставит в соответствие города, которые находятся на его территории, **не является функцией**, поскольку оно не обладает свойством однозначности.

(3) возведение натурального числа в квадрат.

Данное отображение каждому натуральному числу ставит в соответствие квадрат этого числа. Например, числу 1 – число 1, числу 2 – число 4, числу 3 – число 9 и т.д.

У этой функции ООФ и ОЗФ совпадают, это множество натуральных чисел.

Обратное отображение **не является функцией**, поскольку оно не обладает свойством всюду определенности: например, числу 3 ничего не будет сопоставлено, поскольку нет натурального числа, квадрат которого был бы равен 3.

(4) сложение двух натуральных чисел

Эта функция паре любых натуральных чисел сопоставляет единственное натуральное число – их сумму. Например, паре чисел $\langle 5, 3 \rangle$ – число 8, паре $\langle 10, 1 \rangle$ – число 11, паре $\langle 3, 3 \rangle$ – число 6 и т.д.

ООФ в данном случае это не множество, состоящее из отдельных натуральных чисел, а множество **пар** натуральных чисел. Элементами ООФ являются $\langle 5, 3 \rangle$, $\langle 10, 1 \rangle$, $\langle 3, 3 \rangle$ и все другие пары натуральных чисел. ОЗФ – множество натуральных чисел (не пар!). поскольку сумма двух чисел есть (одно) число.

(5) результат сдачи ЕГЭ выпускниками школ по обязательным дисциплинам

Данная функция каждой паре, состоящей из выпускника и обязательной дисциплины, сопоставляет количество баллов, полученных этим школьником за ЕГЭ по этой дисциплине. Например, паре $\langle \text{Петров, математика} \rangle$ сопоставляет 90 баллов (если Петров сдал ЕГЭ по математике с результатом 90 баллов).

ООФ данной функции – это множество **пар**, первая компонента которых является выпускником школы, а вторая компонента – обязательной дисциплиной ЕГЭ (русским языком или математикой). ОЗФ – множество возможных итоговых баллов (от 0 до 100).

Местность функции

Элементы ООФ могут быть не только *отдельно взятыми* объектами, но *парами* объектов, а также, *тройками*, *четверками* и т.д. объектов, т.е. *упорядоченными последовательностями разной длины*. Такие упорядоченные последовательности объектов называют **кортежами**.

Местность функции определяется длиной кортежей, которые составляют ООФ:

- **одноместная** функция – функция, область определения которой состоит из отдельно взятых объектов (или же кортежей длины 1);
- **двухместная** функция – функция, область определения которой состоит из пар объектов (кортежей длины 2);
- **трехместная** функция – функция, область определения которой состоит из троек объектов (кортежей длины 3);
-
- **неопределенно-местная** функция – функция, область определения которой состоит из кортежей различной длины.

К одноместным функциям относятся функции из рассмотренных выше примеров (1), (2) и (3). Функции из примеров (4) и (5) являются двухместными.

Примером неопределенно-местной функции является

(6) функция, сопоставляющая любому конечному кортежу натуральных чисел наибольшее из чисел этого кортежа.

Например, кортежу $\langle 5, 3 \rangle$ эта функция сопоставляет число 5; кортежу $\langle 10, 1, 12 \rangle$ – число 12, кортежу $\langle 5, 8, 5, 7 \rangle$ – число 8 и т.д.

Для того, чтобы задать функцию необходимо:

- указать ее область определения,
- указать ее область значений,
- для каждого элемента ООФ указать (единственный) сопоставляемый ему элемент ОЗФ.

Способы задания функции:

I. Графический

Изображают два множества – ООФ и ОЗФ, и стрелками указывают, какие именно элементы ОЗФ сопоставляются элементам ООФ. В математике функции часто задают с помощью графика в системе координат.

II. Табличный

Таблица из двух колонок: в первой – список элементов ООФ, во второй – элементы ОЗФ, сопоставляемые соответствующим элементам ООФ. Пример: экзаменационная ведомость; в первой колонке список студентов группы, во второй – полученные каждым из них оценки.

III. **Аналитический** – формулировка правила, согласно которому элементам ООФ сопоставляются элементы ОЗФ.

Это правило может быть выражено в языке конструкции вида

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

состоящей из *знака функции (функтора) F и переменных $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$* , причем с каждой переменной связано свое множество (*область возможных аргументов для переменной или область пробега переменной*), причем множество переменных упорядочено.

Данная конструкция называется **аналитическим представлением функции**.

Аналитические представления функций из Примеров (1)–(5)

(1) столица x ,

где x пробегает по множеству государств.

Знаком функции (функтором) здесь является термин «столица».

(2) государство, на территории которого расположен x ,

где x пробегает по множеству городов.

Функтором здесь является словосочетание «государство, на территории которого расположен...»

(3) x^2 ,

где x пробегает по множеству натуральных чисел.

Функтором здесь является знак возведения в квадрат « 2 ».

$$(4) x + y,$$

где первая переменная x и вторая переменная y пробегают по множеству натуральных чисел.

Функтором здесь является знак сложения « $+$ ».

$$(5) \text{результат, полученный } x \text{ на ЕГЭ по } y,$$

где первая переменная x пробегает по множеству выпускников школ, а вторая переменная y пробегает по множеству обязательных дисциплин ЕГЭ.

Функтором здесь является словосочетание «результат, полученный ... на ЕГЭ по ...»

$$(6) \max(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где каждая из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ пробегает по множеству натуральных чисел.

Знаком функции выбора наибольшего (максимального) числа является « $\max$ ».

Множества, связываемые с переменными в аналитическом представлении функции $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, называются **областями возможных аргументов функции**, а сами элементы этих множеств – **(возможными) аргументами функции**, причем i -тым возможным аргументом называется элемент области возможных аргументов, связанной с i -той переменной, т.е. с α_i .

Например, первыми возможными аргументами функции (5) «результат, полученный x на ЕГЭ по y » являются выпускники школ – Иванов, Петров, Сидоров и т.д., а вторыми возможными её аргументами – дисциплины *математика* и *русский язык*.

Декартовым произведением множеств $D_1, D_2, \dots, D_n$ ($D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$) называется множество n -ок (кортежей длины n), таких что первая компонента кортежа является элементом D_1 , вторая компонента – элементом D_2 , ..., n -ая (последняя) компонента кортежа – элементом D_n .

Область определения функции можно рассматривать как **результат декартова произведения областей возможных аргументов**, т.е. как множество $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_n$, где D_i – область возможных аргументов, связанная с переменной α_i .

Например, ООФ функции (5) «результат, полученный x на ЕГЭ по y » есть декартово произведение двух множеств: первое – множество выпускников школ (это область возможных аргументов для x), второе – множество дисциплин обязательного ЕГЭ (это область возможных аргументов для y).

У функций от одного аргумента ООФ совпадает с областью возможных аргументов.

Подставляя вместо переменных знаки соответствующих возможных аргументов в аналитическое представление функции $F(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, получаем выражение, репрезентирующее тот элемент ОЗФ, который функция сопоставляет n -ке данных аргументов.

Например, подставляя в аналитическое представление функции (1) «столица x » вместо переменной x имя «Россия», получаем выражение «столица России», а оно является именем Москвы. Сама же функция как раз и сопоставляет государству Россия город Москва.

Подставляя в аналитическое представление функции (4) « $x + y$ » вместо x имя «5», а вместо y имя «3» получаем выражение « $5 + 3$ », которое обозначает число 8. Это число как раз и сопоставляется функцией сложения паре чисел 5 и 3.

Элементы ОЗФ называют еще *возможными значениями функции*.

Как установить местность функции по её аналитическому представлению?

Местность функции равна **числу различных свободных переменных** в аналитическом представлении.

Примеры:

$x + y$ – двухместная функция (она каждой паре чисел сопоставляет число),

$x + 1$ – одноместная функция (она каждому отдельному числу сопоставляет число, на единицу большее его),

$x + x$ – одноместная функция (она каждому отдельному числу сопоставляет число, большее его в 2 раза),

$(x + y) \cdot (x + z)$ – трехместная функция,

$x_1 + x_2 + \dots + x_n$ – неопределенно-местная функция.

В этой лекции были изложены предварительные сведения, которые необходимы для ответа на следующие вопросы:

(а) что может являться аргументом функции;

(б) какими бывают функции;

(в) как классифицировать языковые выражения (в рамках функционального подхода) в зависимости от того, знаками каких функций и каких аргументов функций они являются.

Ответы на эти вопросы будут даны в следующей лекции. Там же будет предоставлен список упражнений для самоконтроля.