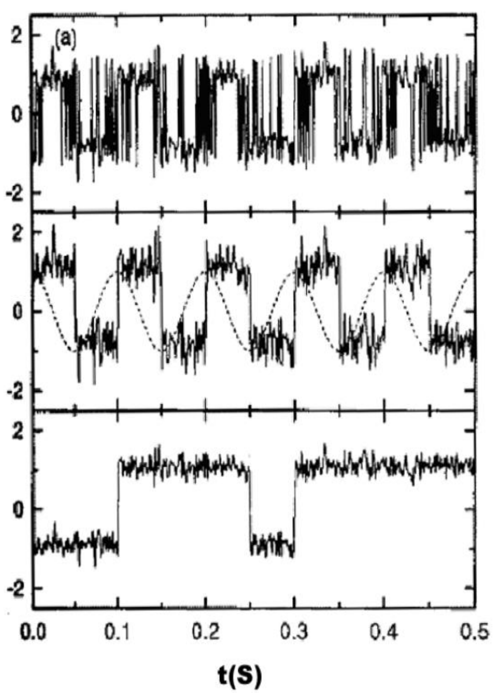
20 мая у нас последняя лекция и проставление зачета.

Для получения зачета нужно выполнить задания к большей части лекций. Выполненные задания нужно присылать мне на адрес chichuch@yandex.ru. Никаких строгих требований к оформлению заданий нет. Можно просто фотографировать рукописные листы.

Успехов!

Ольга Александровна

Уравнения Ланжевена и Фоккера-Планка



О роли детерминированного и случайного факторов в случайных процессах

Мы разобрались с процессами, в которых случайность играет основную роль (случайные блуждания, движение в бильярдах, дискретные марковские процессы). Но в реальных процессах в природе и в человеческом обществе все сложнее. Детерминированное (предсказуемое, соответствующее законам) и случайное сочетаются некоторым нетривиальным образом, и нельзя пренебречь ни тем ни другим.

Рассмотрим величину, которая эволюционирует таким сложным образом. Тогда уравнение для производной этой величины будет содержать два слагаемых, описывающих детерминированную часть и случайную. Такие уравнения называются Стохастические дифференциальные уравнения

(СДУ)

$$\dot{x} + a(x) = b(x)\xi(t)$$

случайный процесс

Функция *a*(*x*) описывает детерминированную динамику системы, функция *b*(*x*) — влияние шума на нее. Случайный процесс называется белым шумом и его считают дельта-коррелированным.

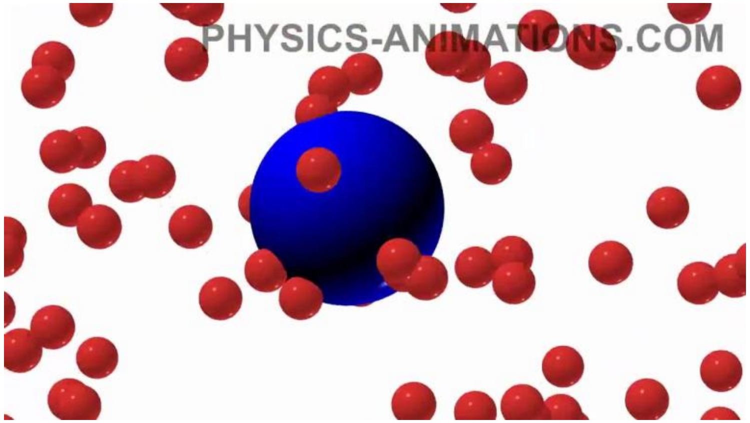
$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = 2D\,\delta(\tau)$$

Это означает, что время корреляции (связи, памяти) равно нулю. Следующее значение величины не связано с предыдущим. константа *D* характеризует интенсивность шума.

Рассмотрим уже знакомые процессы в новой форме СДУ.

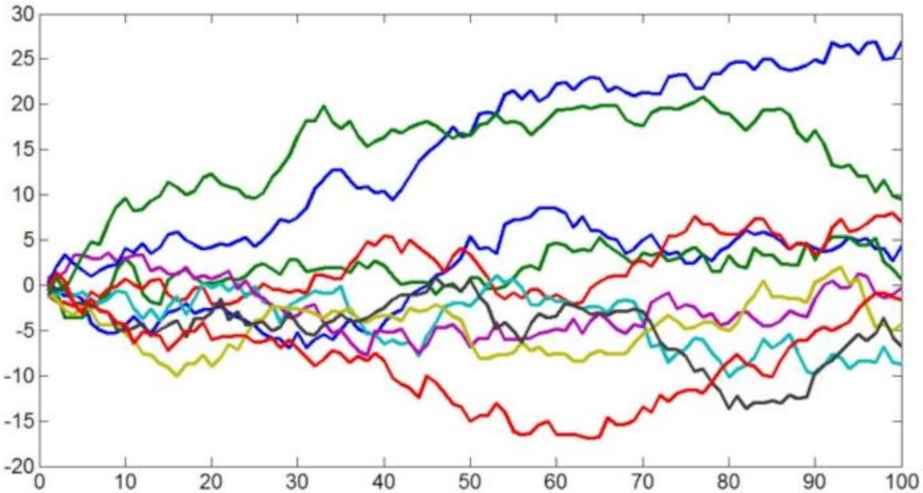
Например, случайное блуждание броуновской частицы, у которой нет никакого детерминированного воздействия, будет давать уравнение для координаты в виде. Здесь случайный процесс – это скорость. Этот процесс называется Винеровский процесс. Скорости можно считать некоррелированными, то есть независимыми друг от друга, они связаны с ударами отдельных, независимых друг от друга частиц

Решение уравнения формально можно записать вот так



Реализации винеровского процесса
(суммы нормального белого шума)

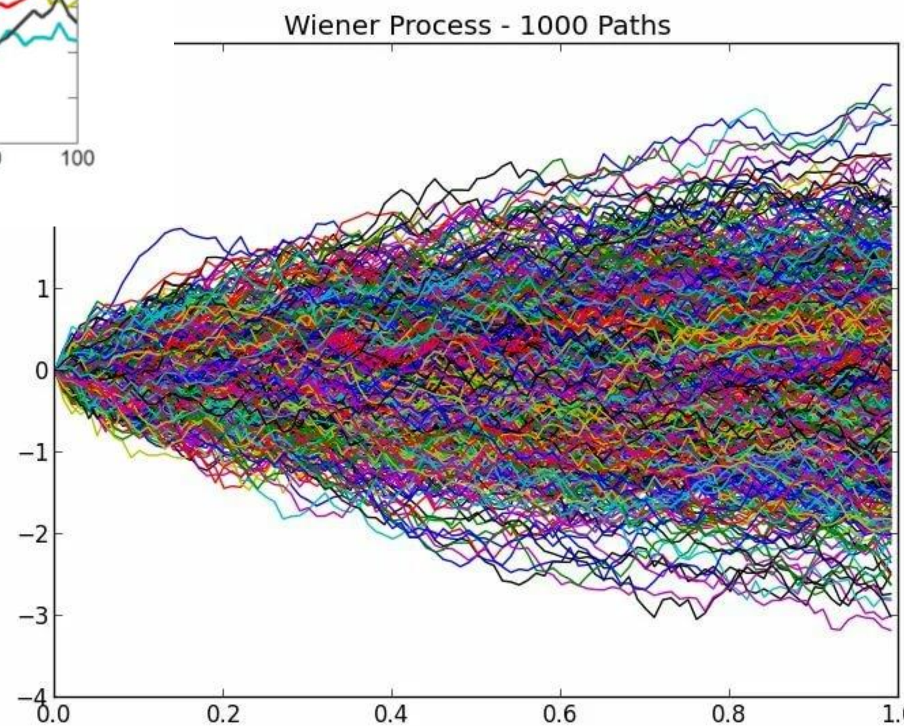
```
N = randn(10,100);
Wn = cumsum( (N)' );
plot(Wn)
```



Если получить на компьютере много реализаций таких процессов, то можно представить себе плотность распределения вероятностей, которая является Гауссовским колоколом и расширяется со временем.

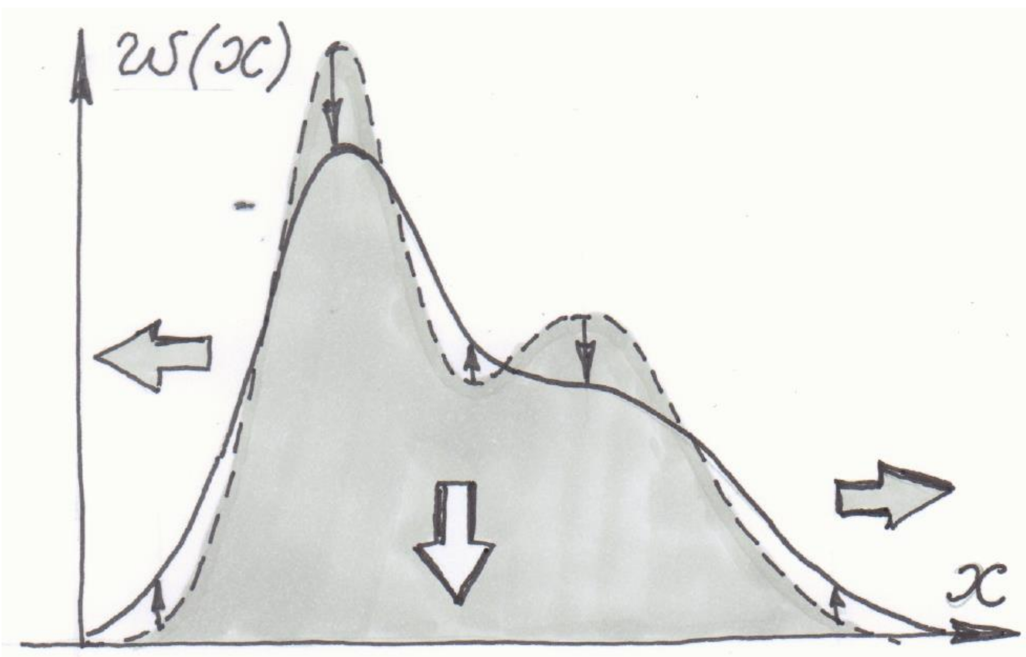
Мы получили в лекции про случайные блуждания, что это распределение подчиняется уравнению диффузии.

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w\,(x,t)}{\partial x^2}$$



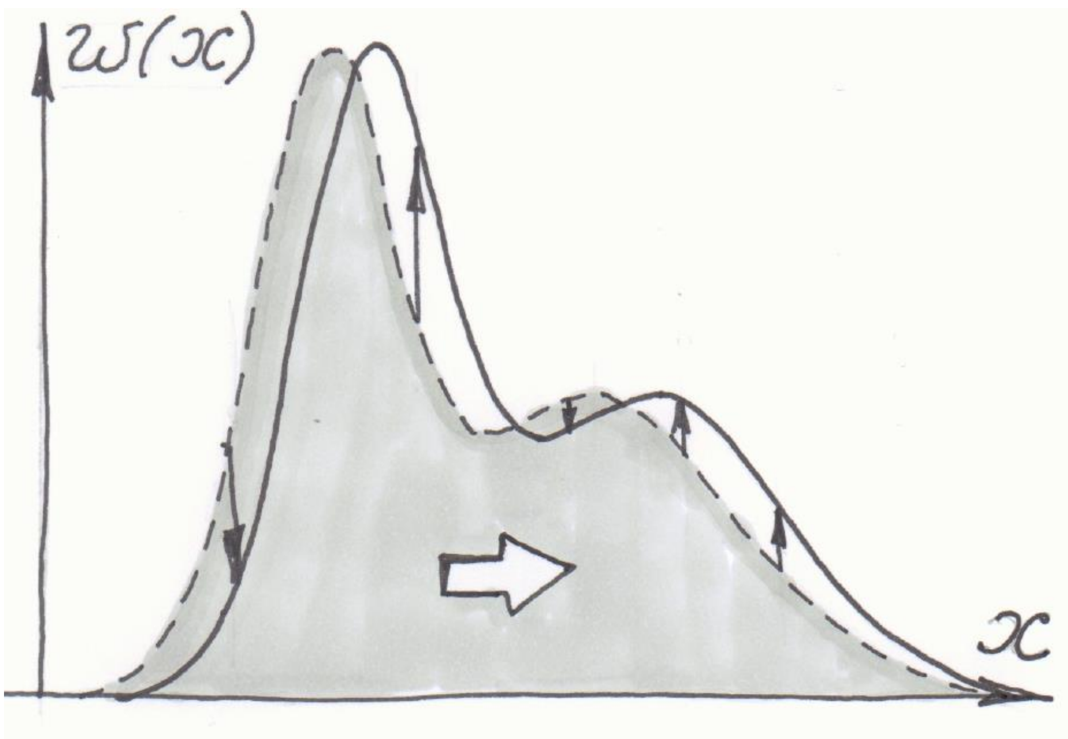
Это уравнение описывает, как мы говорили, хаотическую часть эволюции и приводит к расплыванию распределения вероятностей. Таким же, как уравнение диффузии, будет слагаемое в уравнении для распределения, описывающее случайную часть.

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w\,(x,t)}{\partial x^2}$$



Там, где вторая производная по координате положительная (выпуклость вниз) функция возрастает со временем (производная по времени положительная)

Теперь поймем, как влияет на распределение детерминированное воздействие. Оно приводит к сдвигу (дрейфу) с некоторой скоростью. Его можно описать уравнением дрейфа. Видим, что при движении вправо та часть графика, где производная положительная, как бы спускается, то есть производная по времени отрицательная, и наоборот. Причем, чем круче идет график, тем это изменение (подъем – спуск) заметней.



$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(K_1 w\,(x,t)\Big)$$

Соединяя оба вида эволюции, получаем Уравнение Фоккера-Планка, в котором первое слагаемое описывает детерминированную эволюцию, а второе – воздействие шума

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(K_1 w\left(x,t\right)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K_2 w\left(x,t\right)\right)$$

Кинетические коэффициенты называются коэффициентом сноса (или дрейфа) K_1 и коэффициентом диффузии K_2, на самом деле они могут быть функциями от x.

$$K_1 = \left\langle \frac{\Delta x_\tau}{\tau} \right\rangle, \; K_2 = \left\langle \frac{(\Delta x_\tau)^2}{\tau} \right\rangle$$

где τ — интервал времени достаточно большой, чтобы корреляции успели затухнуть, и процесс стал марковским, но и достаточно малый, чтобы условное приращение $\Delta x_\tau = x(t+\tau) - x(t)$ за это время было много меньше характерных масштабов процесса.

Пользуясь определением кинетических коэффициентов и выражая Δx_τ как интеграл от производной по времени, можно доказать, что кинетические коэффициенты УФП запишутся через коэффициенты СДУ следующим образом

$$K_2 = 2Db^2, \;\; K_1 = -a + Dbb'.$$

Это интерпретация Стратоновича. Если выкинуть второе слагаемое в K_1, будет интерпретация Ито.

Интерпретация Стратоновича правильная, но чаще используют Ито, потому что она проще. При постоянном значении *b(x)* они совпадают. Можно найти стационарное распределение вероятностей, приравняв нулю производную по времени. Можно выразить это равновесное распределение через коэффициенты из УФП и СДУ.

$$w_{st}(x) = \frac{C}{K_2} \exp\left[2 \int^x \frac{K_1(x')\ dx'}{K_2(x')}\right]$$

$$w_{st}(x) = \frac{C}{|b(x)|} \exp\left[-\frac{1}{D} \int^x \frac{a(x')\ dx'}{b^2(x')}\right]$$

$$m\dot{v}_x = -\gamma v_x + \xi(t)$$

$$\langle v_x^2 \rangle = kT/m$$

$$D_\xi = kT\gamma$$

Для скорости броуновской частицы СДУ будет второй закон Ньютона с двумя слагаемыми. Первое описывает силу трения в среде, а второе – случайные силы, действующие как удары частиц среды. Равновесное распределение будет Гауссовским с нулевым средним, как и для проекции скорости молекулы.

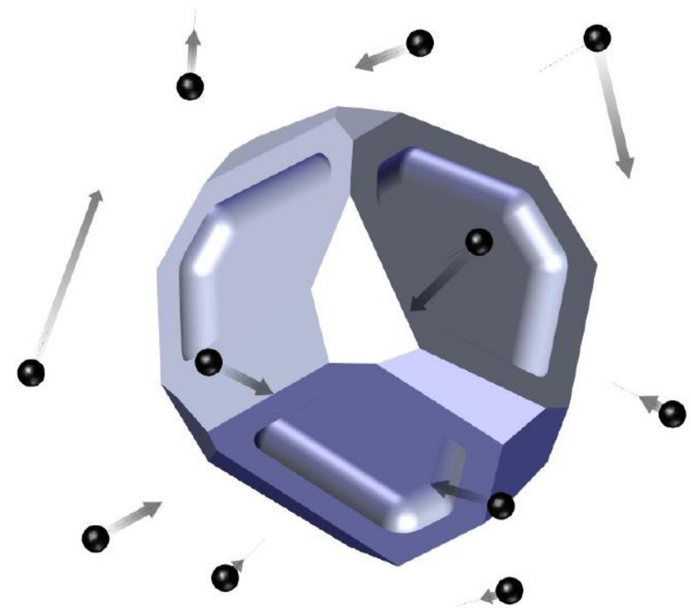


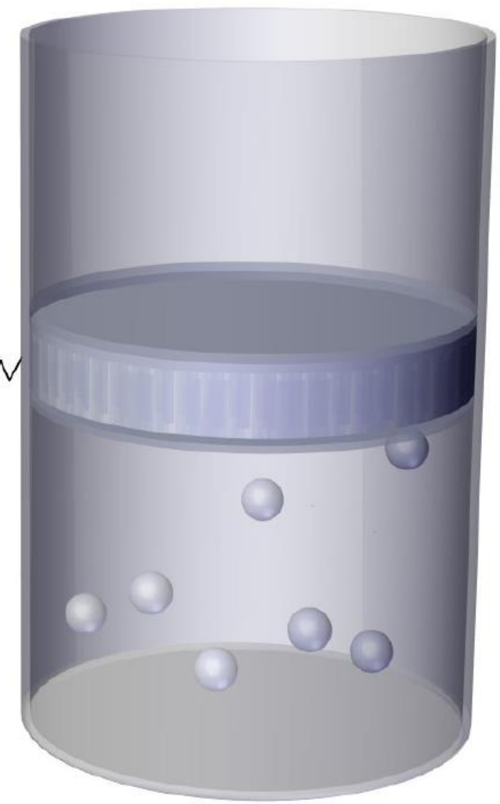
Рис. 27: Броуновская частица в идеальном газе

Рассмотрите презентацию http://cmcstatphys.ilc.edu.ru/index.php?id=54
ФЛУКТУАЦИИ ВЫСОТЫ ПОЛОЖЕНИЯ ПОРШНЯ.

В презентации смоделировано движение поршня и молекул в сосуде фиксированной площади основания, но бесконечной высоты. Рядом с сосудом рисуется график зависимости высоты поршня от времени, на котором в реальном времени отображается текущее среднее значение высоты поршня, то есть математическое ожидание. Шкала времени смещается по мере прохождения эксперимента, а после нажатия кнопки СТОП рисуется график флуктуаций за все время эксперимента. Также, после того как поршень немного стабилизируется, отображается график распределения высоты поршня теоретический и экспериментальный и рассчитывается математическое ожидание, дисперсия и флуктуация также теоретическая и экспериментальная. Сразу следует заметить, что не стоит выставлять большое количество молекул в сосуде, а также высокую температуру, так как при таких параметрах поршень будет в основном находиться вверху сосуда и эксперимент будет недостаточно наглядным. Лучше всего выставлять среднюю температуру и количество молекул, а также маленькую массу поршня, чтобы сильнее были колебания. Также не стоит одновременно делать маленькую массу поршня и маленькое внешнее давление, так как при определѐнном количестве молекул и температуре поршень опять же будет находиться в верхнем положении. При малом числе молекул можно видеть, как столкновение с каждой молекулой слегка подбрасывает поршень, а затем он начинает опускаться до следующего столкновения с молекулой. Презентация впечатляет своей вандалоустойчивостью: в ней нельзя сделать что-либо, что привело бы к сбою или нефизичным результатам.

Рассмотрим флуктуации поршня массой m и площадью S в вертикальном цилиндрическом сосуде (рис. 29). Над поршнем вакуум, а под ним одноатомный идеальный газ из N частиц, поддерживаемый при температуре T. Вверх поршень подталкивают удары частиц газа как гигантскую одномерную броуновскую частицу, а вниз на него действует сила тяжести. Вдоль вертикальной оси OX поршень совершает случайные колебания около положения равновесия. СДУ для такого поршня можно записать в соответствии со вторым законом Ньютона

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - mg + pS + \xi(t).$$



Здесь первое слагаемое опять сила вязкого трения, второе – сила тяжести, третье – давление газа, последнее – случайные удары молекул.

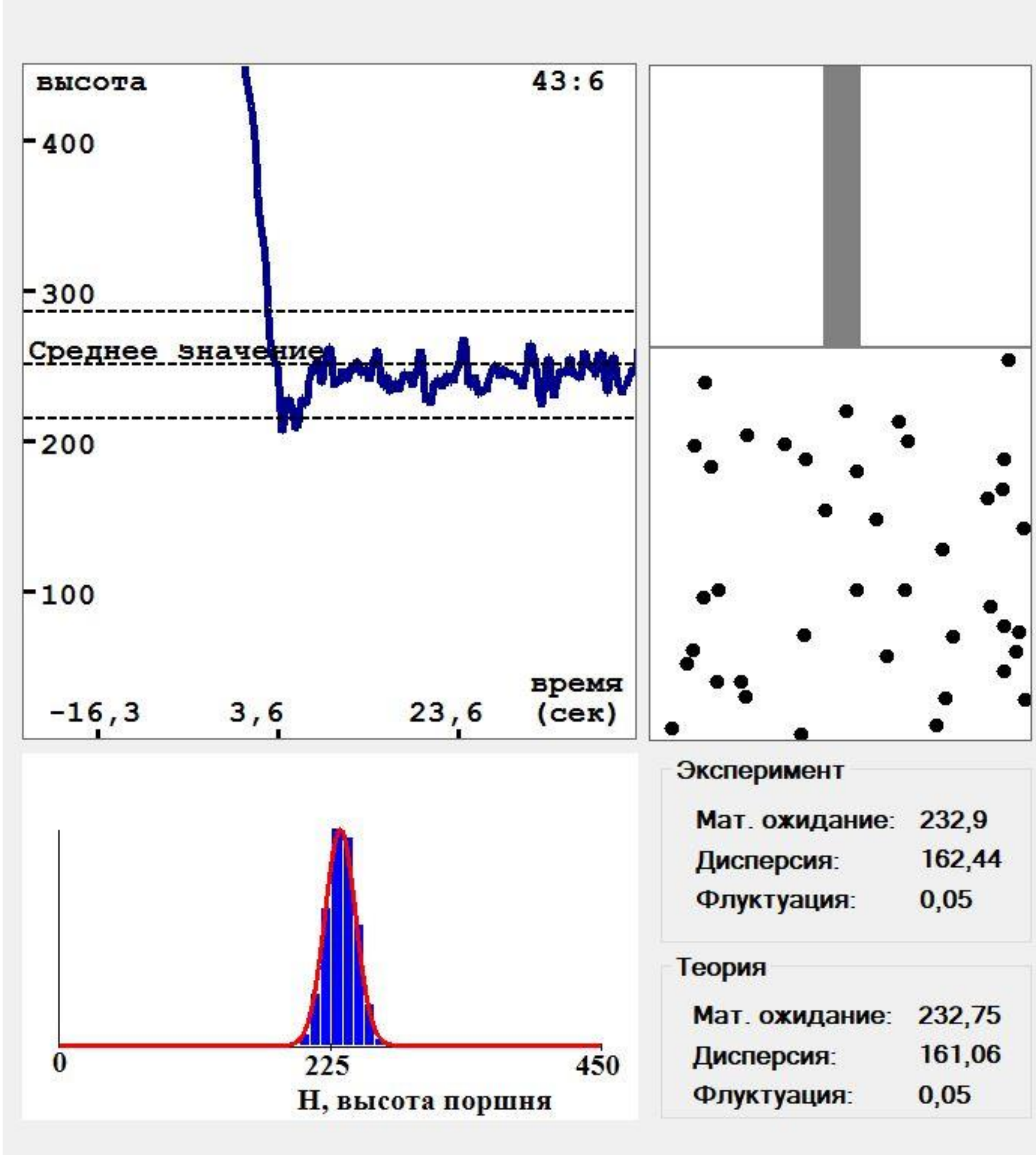
Рис. 29: Флуктуации поршня в цилиндре

Случайные силы $\xi(t)$ характеризуются равновесным значением $D_\xi = kT\gamma$. Рассмотрим флуктуации поршня на временах больших времени релаксации, то есть передемпфированную систему, тогда слагаемым со второй производной можно пренебречь. Подставляем выражение для давления из уравнения Менделеева-Клапейрона $p = NkT/(Sx)$ и получаем СДУ в стандартной форме

$$\dot{x} + \frac{mg}{\gamma} - \frac{NkT}{\gamma x} = \frac{1}{\gamma}\xi(t).$$

Отсюда получаем стационарное распределение высоты положения поршня. Такое же получается на графике в презентации

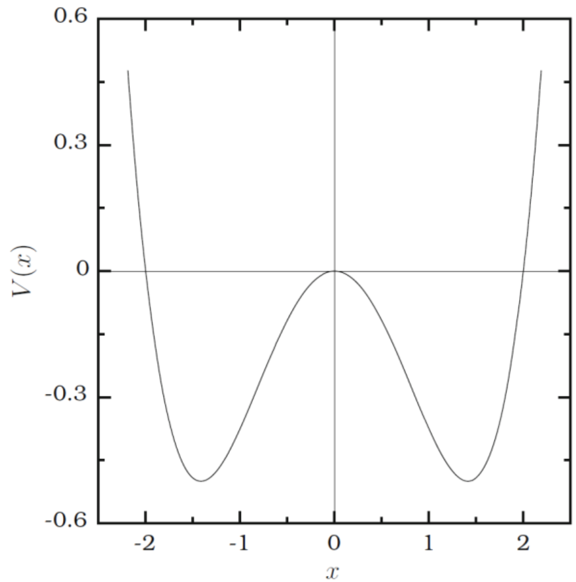
$$w_{st}(x) = Cx^N \exp\left(-\frac{mgx}{kT}\right)$$


высота
43:6
400
300
Среднее значение
200
100
время
(сек)
-16,3
3,6
23,6
0
225
450
H, высота поршня
Эксперимент
Мат. ожидание: 232,9
Дисперсия: 162,44
Флуктуация: 0,05
Теория
Мат. ожидание: 232,75
Дисперсия: 161,06
Флуктуация: 0,05

Стохастический резонанс — усиление периодического сигнала под действием белого шума определенной мощности. Является универсальным явлением, присущим многим системам, находящимся под внешним воздействием одновременно хаотического и слабого периодического воздействия.

Потенциальная энергия с двумя ямами

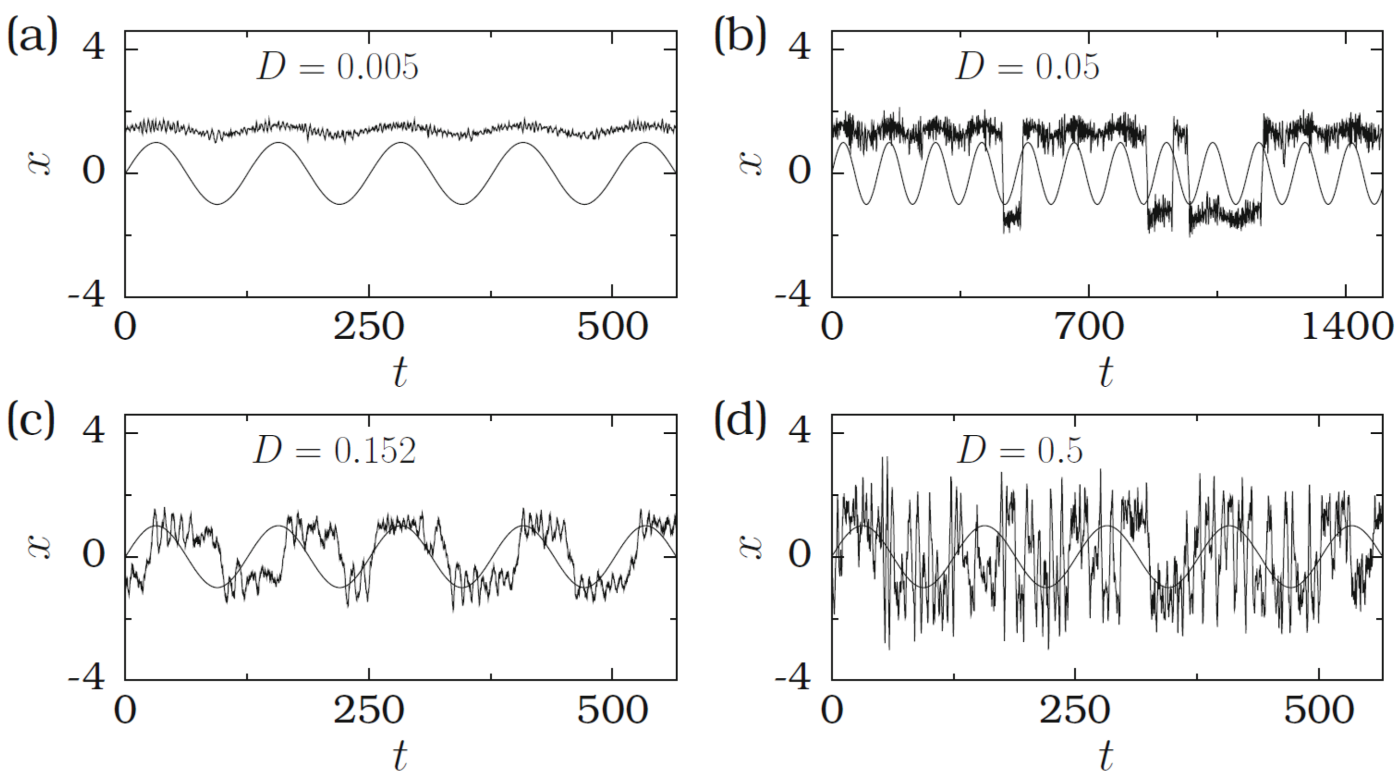
$$V = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4$$



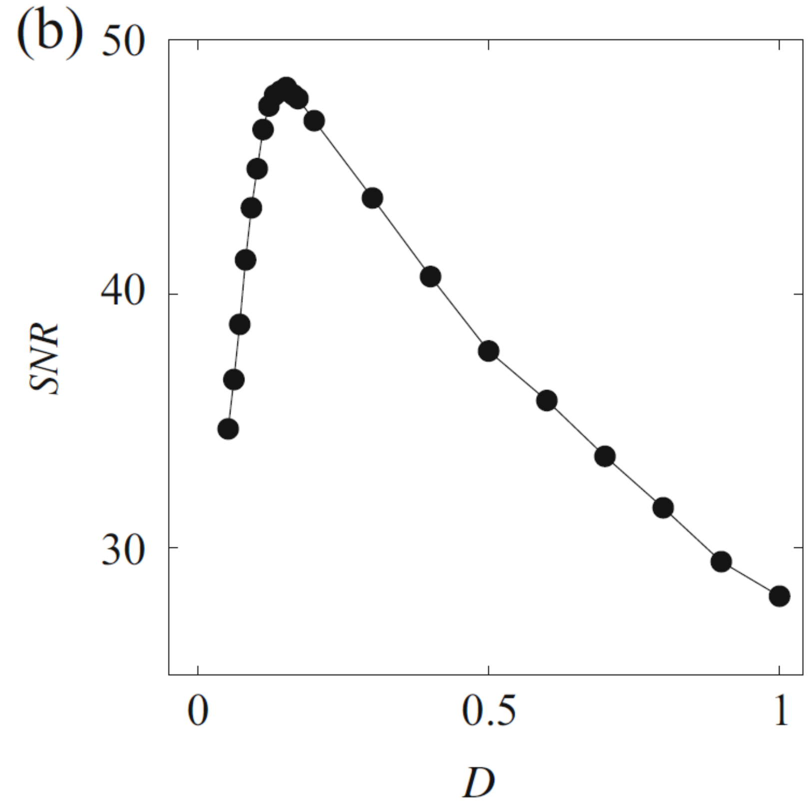
СДУ для системы. Первое слагаемое – сила, созданная потенциалом, второе – трение, третье – периодический сигнал, ну и шум

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \gamma \dot{x} + f \sin(\omega t) + \xi(t)$$

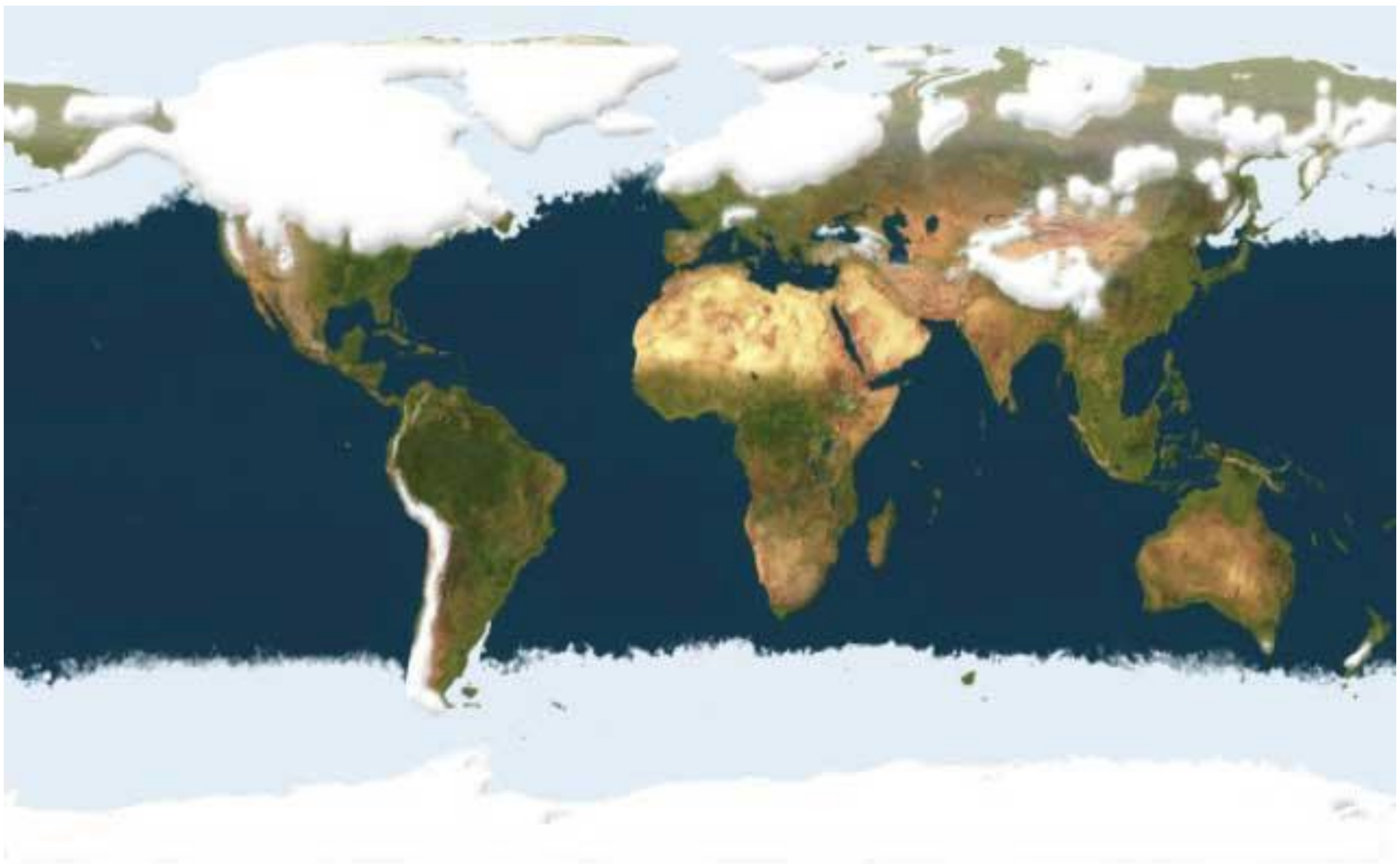
Резонанс, когда период колебаний совпадает со средним временем случайных переходов из ямы в яму. Оно зависит от интенсивности шума D. Если шум мал, то он не помогает переходам из ямы в яму. Если шум большой, то ямы и периодический сигнал вообще не заметны. Таким образом, есть некоторый оптимальный уровень шума, при котором происходит усиление слабого периодического сигнала.



Соотношение сигнал-шум имеет резонансный, то есть с максимумом, вид.



Впервые такую модель предложили для объяснения переходов между ледниковыми и не ледниковыми периодами.



С помощью стохастического резонанса объясняют некоторые явления в нейронных сетях

Подробно изучены органы слух раков и сверчков. Благодаря стохастическому резонансу они могут слышать очень слабые вибрации.

Задания на выбор:

Задача
Получите (проделайте вычисления) стационарное распределение из УФП в общем виде.

Задача
Получите распределение для высоты положения поршня.

Тема для эссе

Как сочетаются в произведениях искусства случайное и закономерное. Можно ли указать на некоторый оптимальный уровень шума (случайности) как в случае стохастического резонанса? Как разные национальные культуры, стили и авторские стили могут различаться по степени случайности?

Тема для эссе
Покажите соотношение сил порядка (культурный герой) и хаоса (трикстер) в мифах. (Например, Аполлон и Дионис; Тор и Локи)

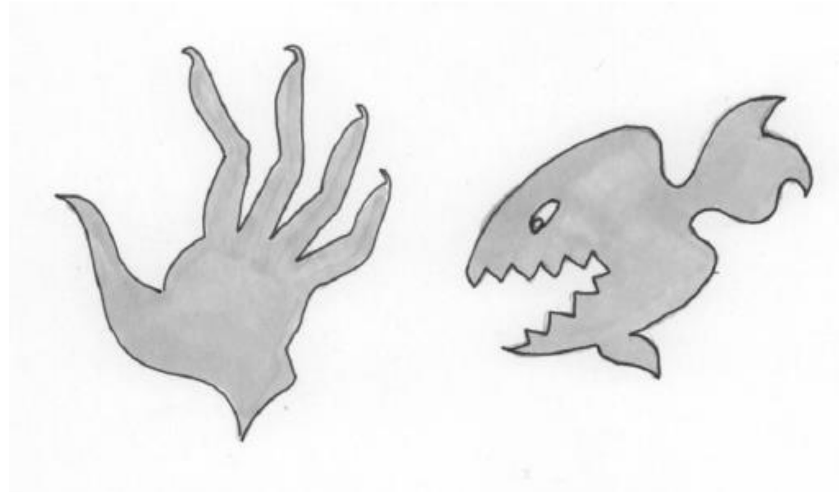
тема для эссе

Разберите следующие пары зарифмованных слов на три группы, соответствующие трем поэтам: Симеону Полоцкому — поэту XVII в., Николаю Гумилеву — поэту Серебряного века Русской поэзии, и Ренате Мухе, писавшей смешные стихи для современных детей. Основной подсказкой будет степень случайности, спонтанности этих рифм, которая нарастала со временем.

1. Этаже — уже 2. Упрямый — дамы 3. Жити — быти 4. Белою — делаю 5. Арктической — практически 6. Родителю — благодетелю 7. Бежит она — неожиданно 8. Кровавой — право 9. Старости — юности 10. Гонимый — держимый 11. Тонкий — гипопотомки 12. Соблазна — крестообразно 13. Насмерть — насморк 14. Плененный — замкненный 15. Вдохнуть — грудь.



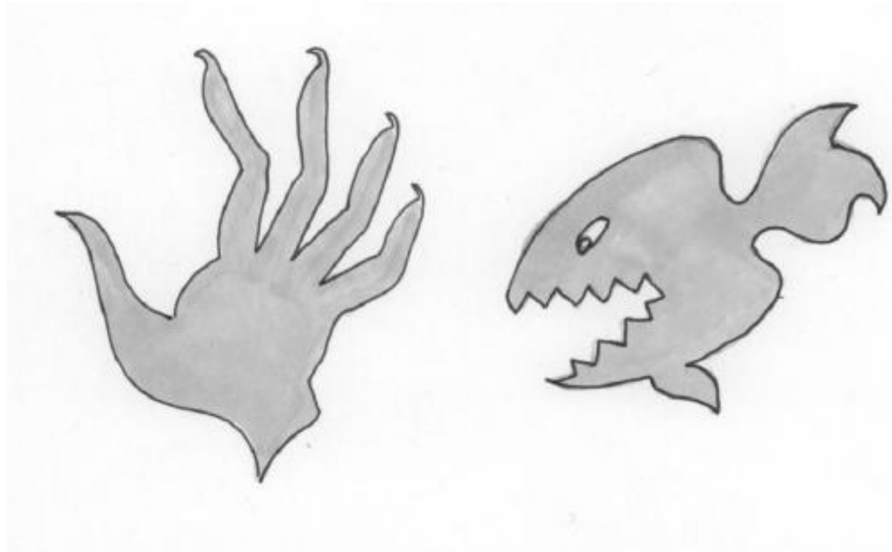
графическое задание

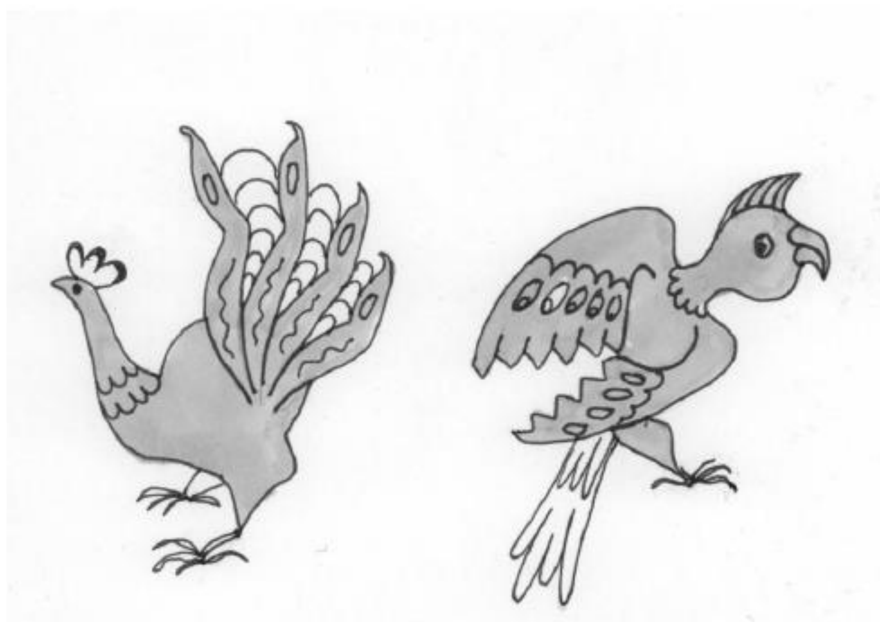


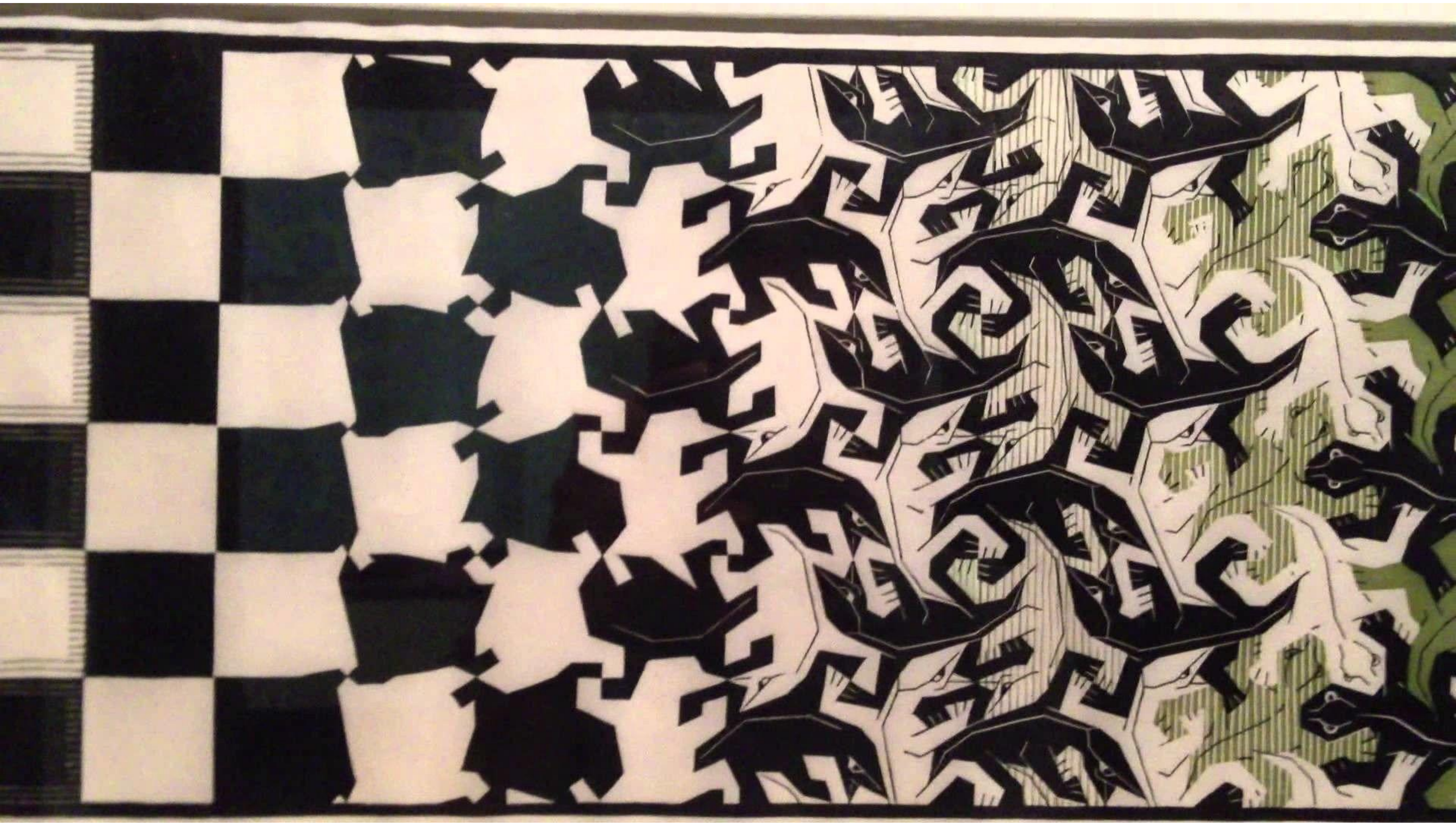
Изобразите один и тот же портрет или предмет несколько раз: с большим количеством мелких случайных деталей и отклонений от симметрии, совсем без них, и промежуточные состояния. Какое изображение Вам больше нравится?

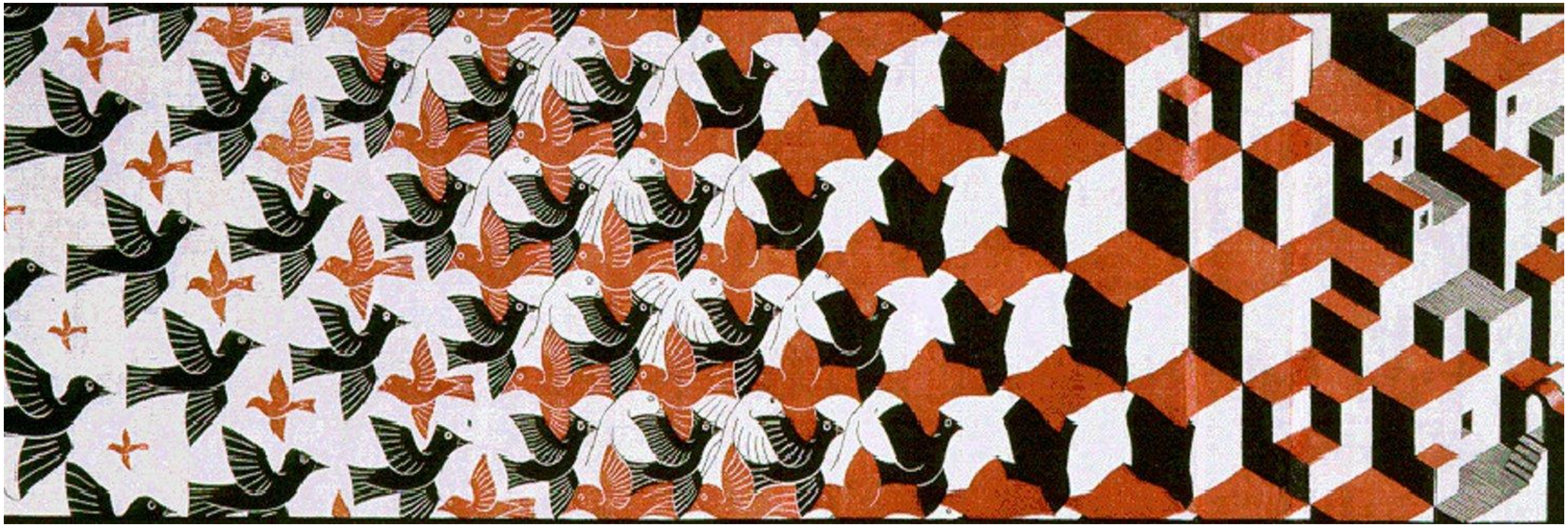
0.6 графическое задание

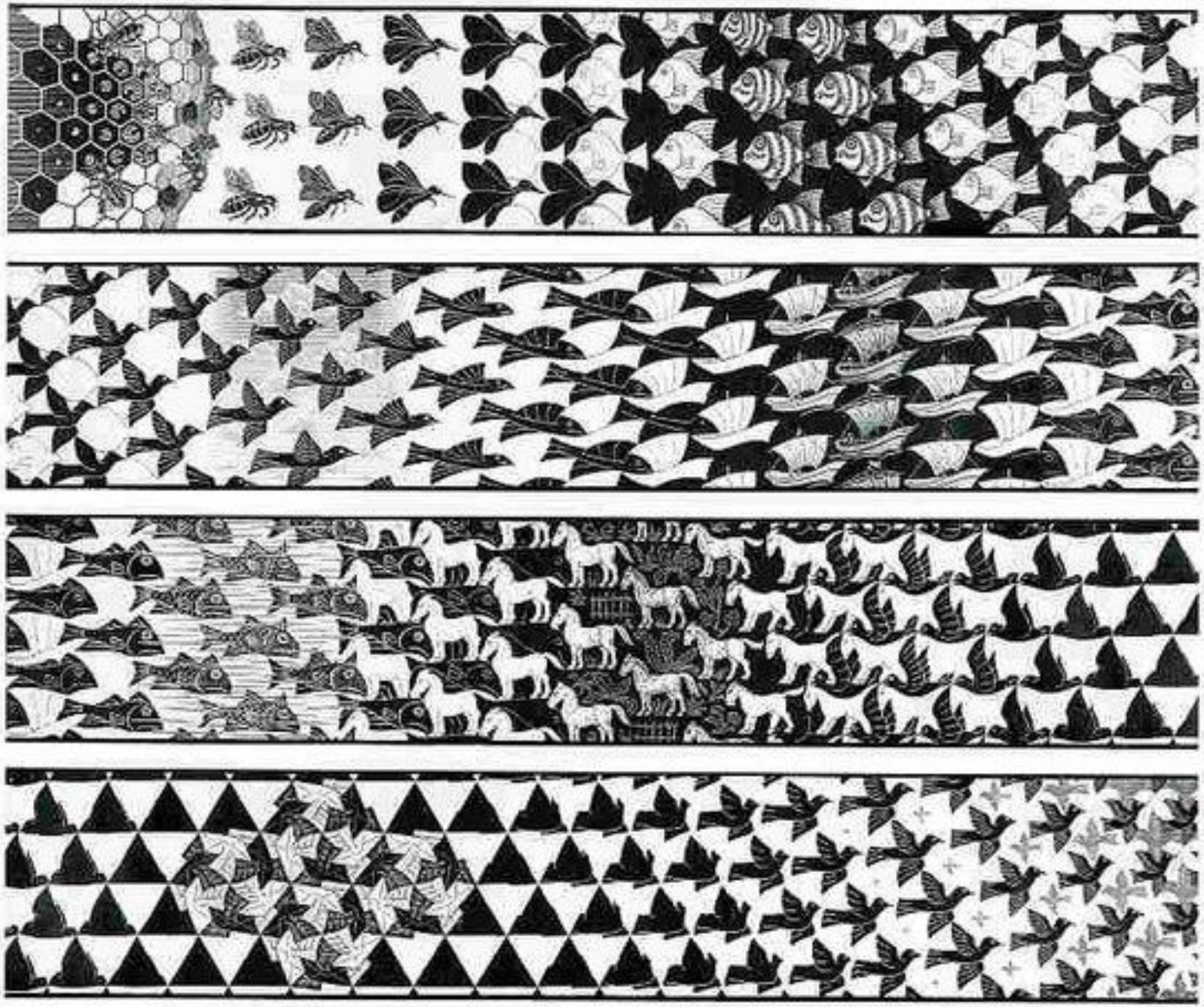
Постройте переход от сильно упорядоченного геометрического паркета к реалистичному изображению как у Эшера. Или наоборот, из случайного контура, подрисовывая детали, получите реалистичное изображение.

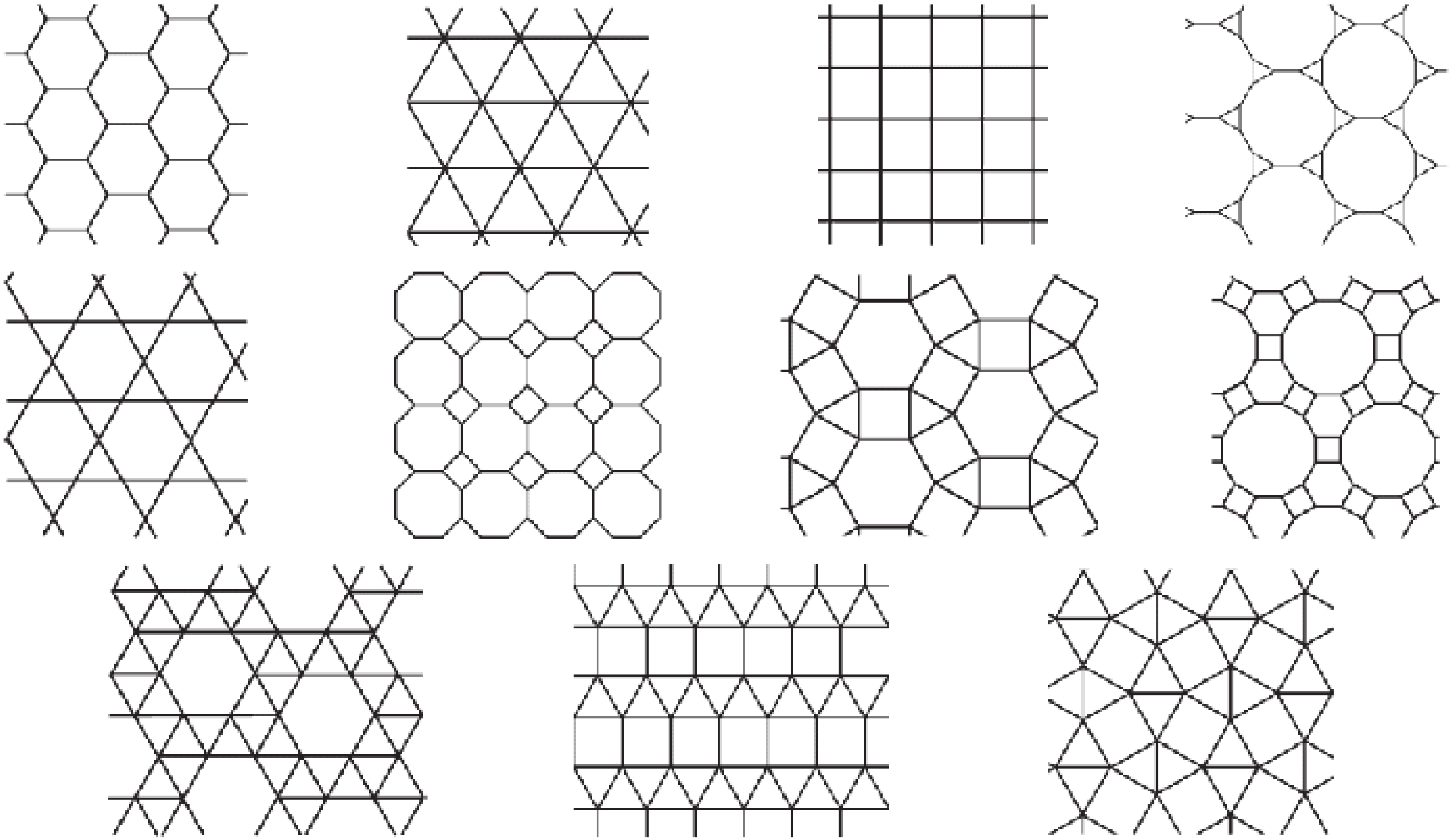


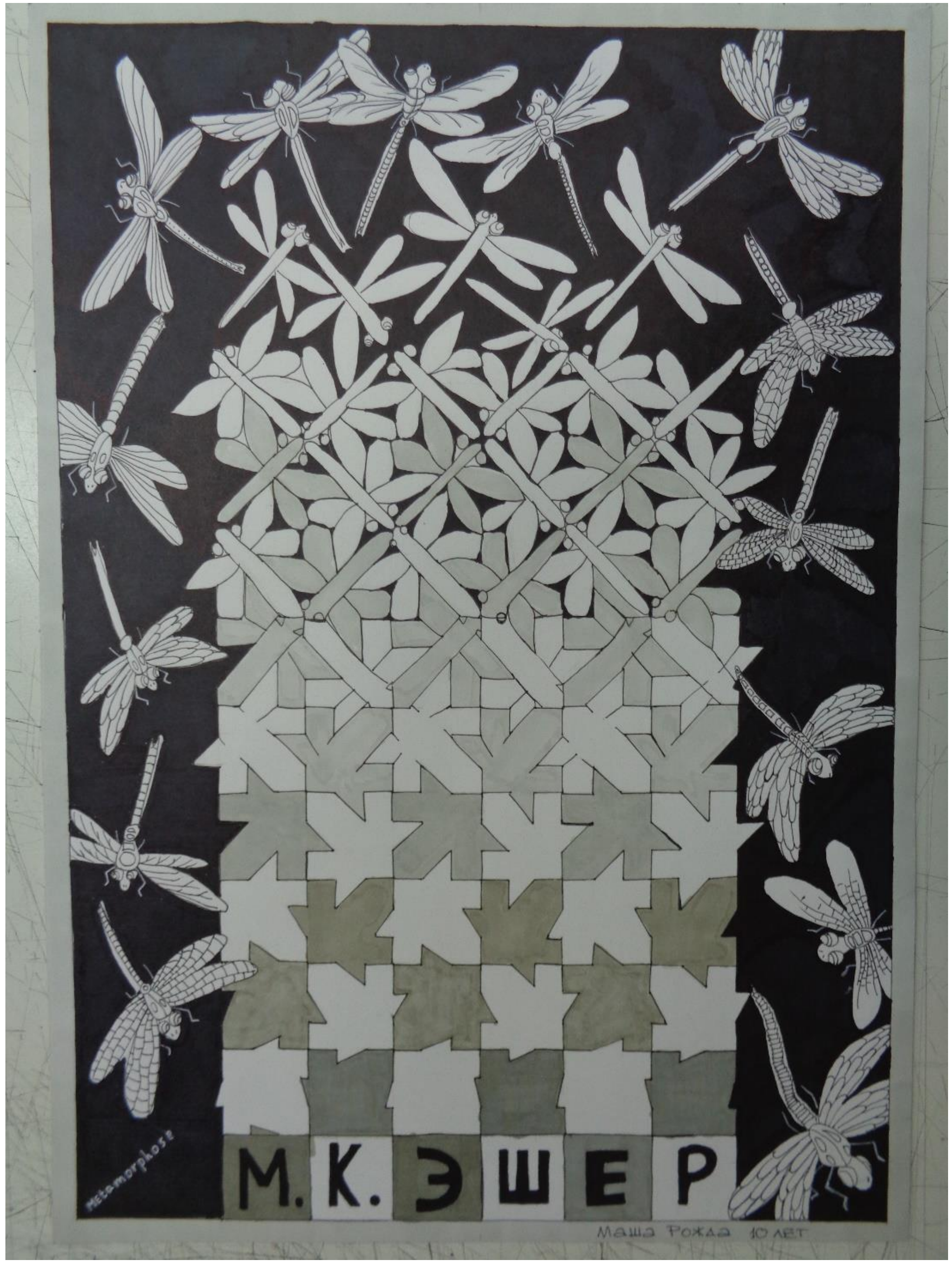




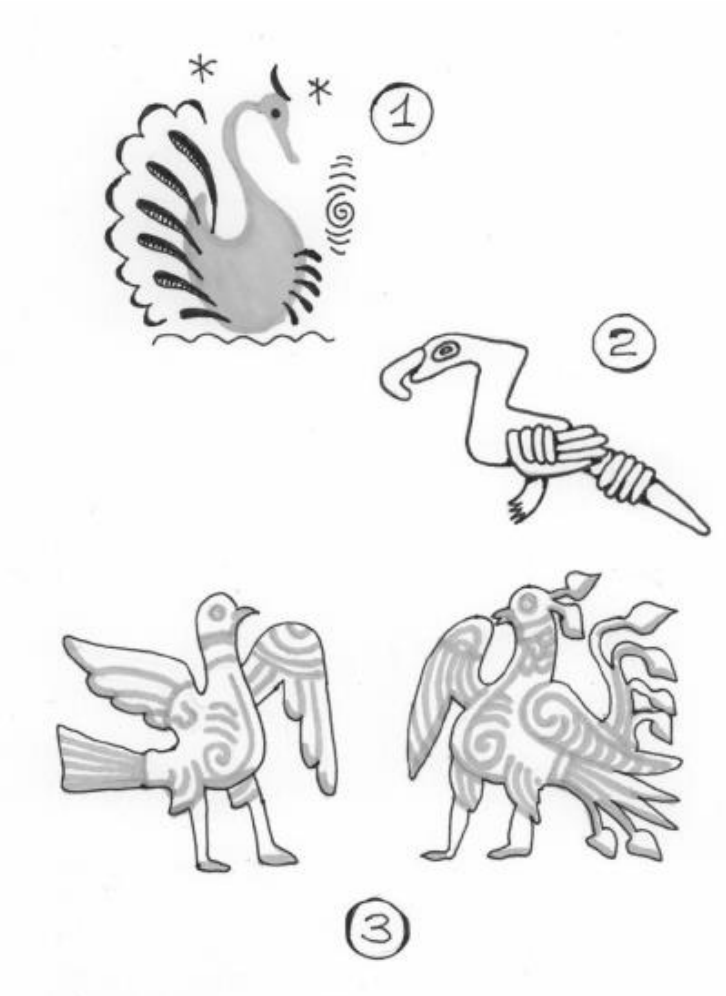


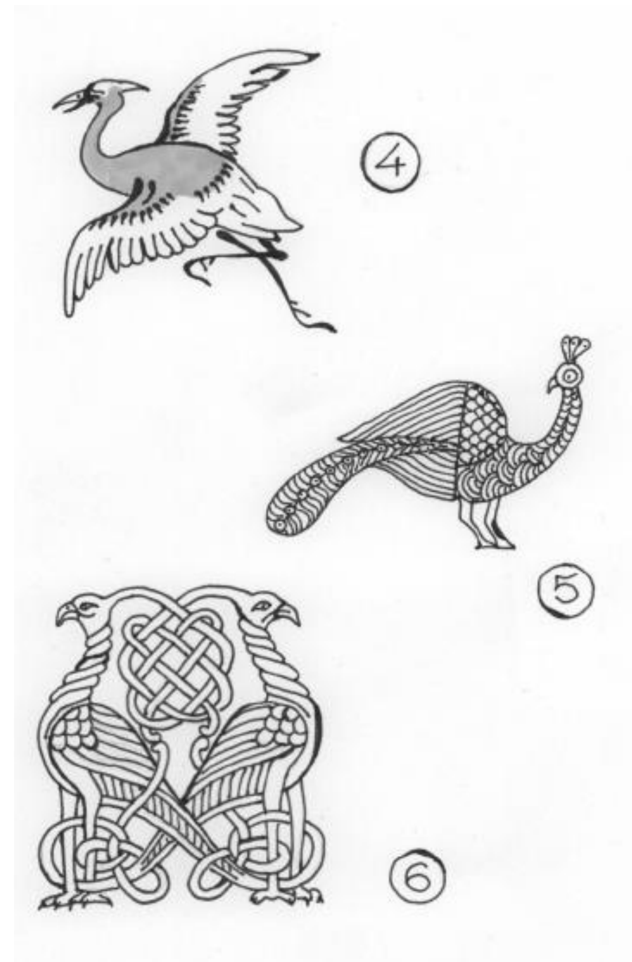





Metamorphose
М.К. ЭШЕР
Маша Рожда 10 лет

Определите, к каким культурам **А–Е** относятся следующие изображения птиц **1–6**. Подумайте, где больше случайных деталей, а где изображение больше подчинено законам геометрии?





А Японская культура
Б Византийская культура
В Мезенская роспись (север Руси)
Г Культура южноамериканских индейцев
Д Кельтская культура
Е Рельефы Дмитровского собора во Владимире.

Подсказки

А Японцы с большим вниманием относятся к природе. Она им интересна сама по себе, а не как символ чего-то большего. Они стремятся изображать животных как можно более реалистично, передавая движение и подчеркивая красоту и индивидуальность птицы.

Б Византийцы любили сложность. Им было интересно соединить вполне реалистичное изображение птицы с орнаментом, привнести максимальную симметрию и гармонию. Можно даже сказать, что они применяли иконописный подход. Птицы похожа на реально существующих, можно даже определить, к какому отряду они принадлежат, но в то же время это преображенные, освобожденные от всех случайных недостатков птицы.

В Мезенская роспись прялок, шкатулок, подносов - прежде всего декоративная и выразительная. Из птиц и лошадей часто складывается орнамент. В нашем черно-белом варианте невозможно передать ярко красный цвет этой росписи, но можно представить. В элементах этой росписи усматривают древнейшие символы воды, земли и т.д.

Г Культура южноамериканских индейцев была весьма суровой. Они устраивали человеческие жертвоприношения. Их изображения животных выглядят устрашающе. Хотя, может, мы, европейцы, просто не понимаем их красоту.

Д Кельты были большими любителями и знатоками всяческих сложных узлов и плетений из длинных веревок. Они изображали их в своих орнаментах, похожих на загадочные и опасные лабиринты.

Е Рельефы Дмитриевского собора сделаны под влиянием Византийских традиций. Они покрывают всю верхнюю часть собора и выглядят издалека затейливым орнаментом. При близком разглядывании они рассказывают целую историю про великое царство, управляемое мудрым правителем, где львы и птицы, и растения пребывают в единстве, сплетаясь в фантастический узор.