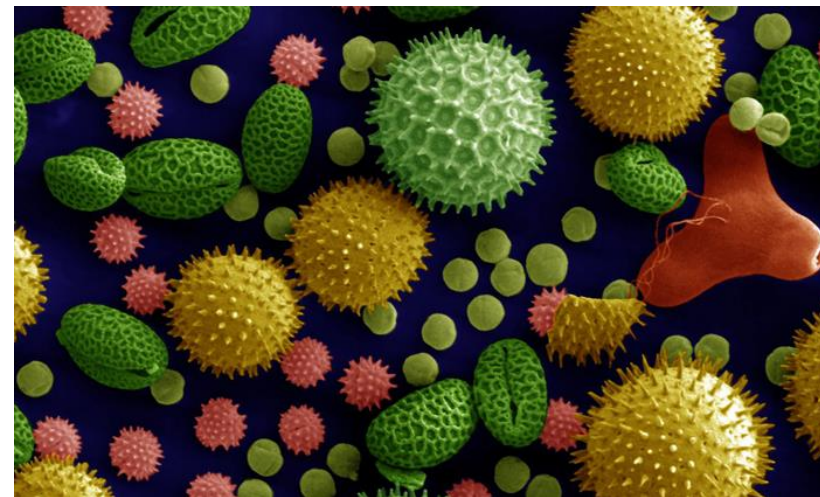
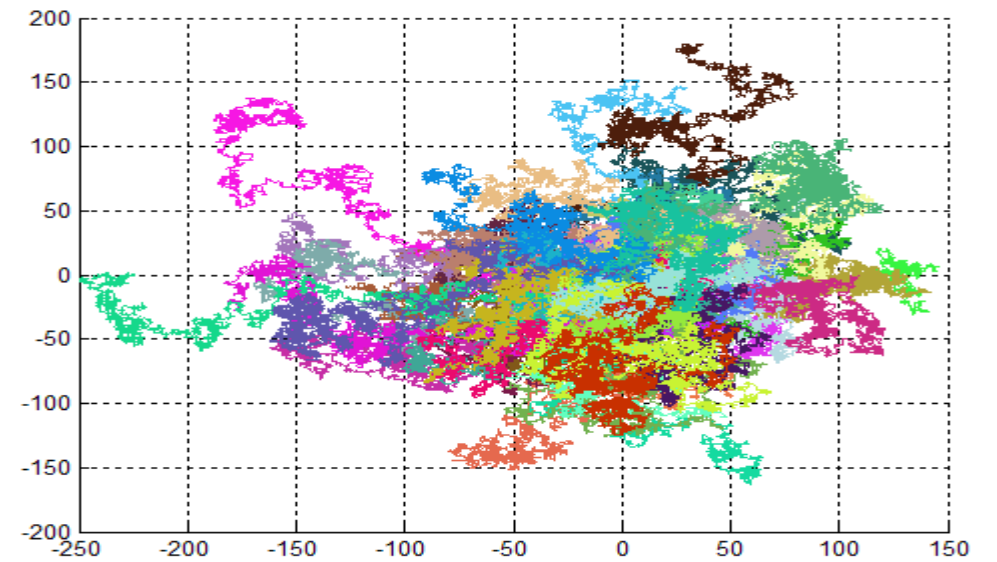
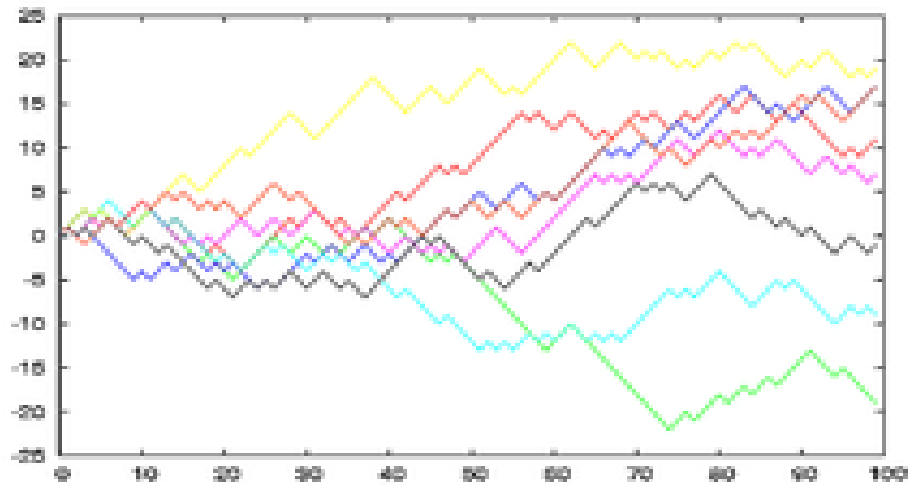


Случайное блуждание

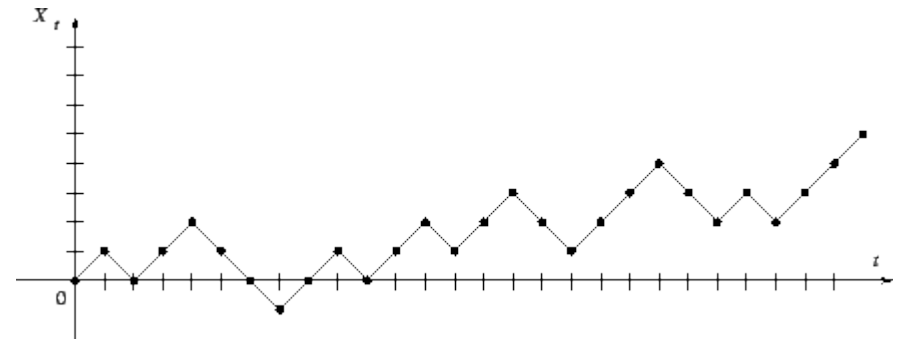


Random walk

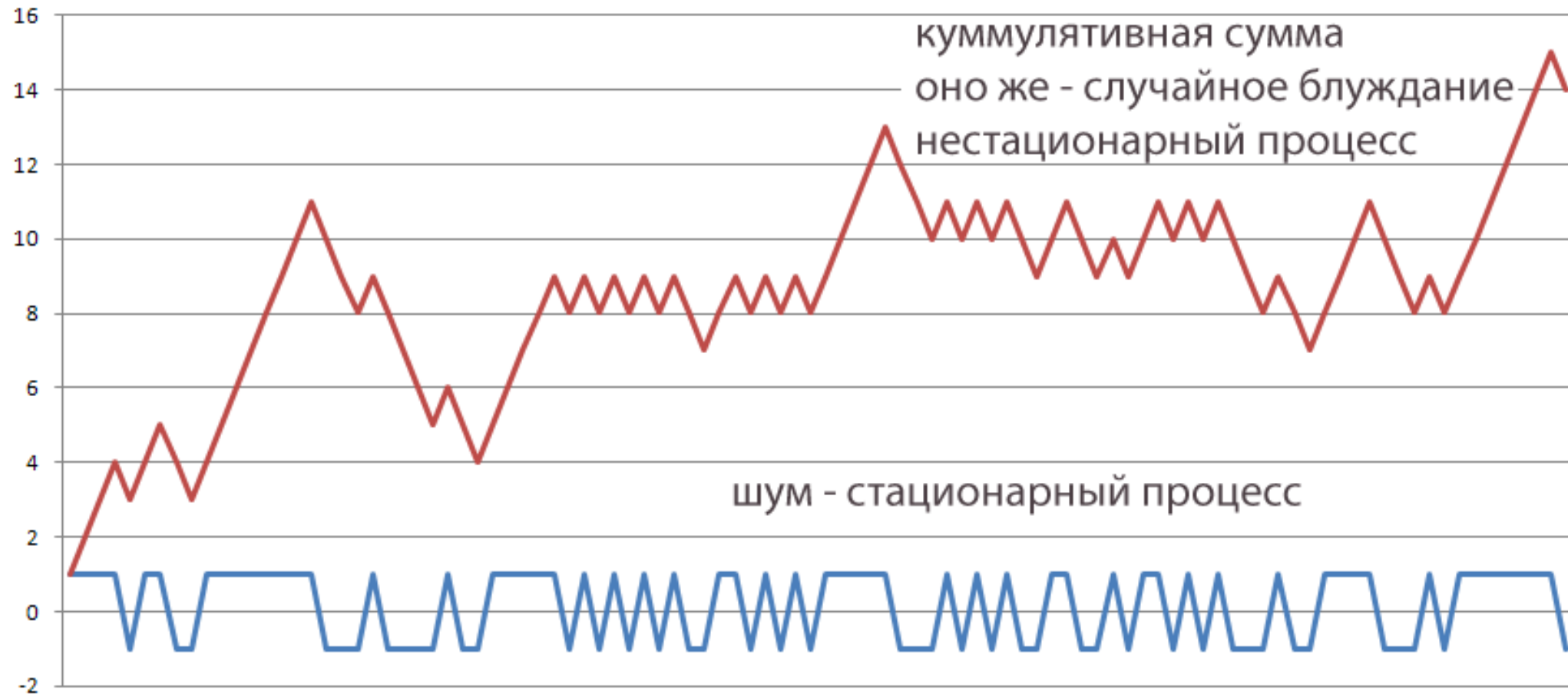
$$\vec{r}_N = \sum_{n=1}^N \vec{\lambda}_n$$



Одномерное случайное блуждание. Слева график движения реальной броуновской частицы вдоль некоторой оси. Справа модельное движение с шагами вверх или вниз с равными вероятностями. Например, горизонтальная проекция движения шарика в доске Гальтона (одинаковые скачки влево - вправо)



Это тоже модель блужданий: синий график – скорость , а красный – смещение (интеграл от синего). Видим, что скорость – стационарный процесс (его среднее и дисперсия остаются постоянными), а смещение – нет(график будет уходить от оси в ту или другую сторону)



Рассмотрим смещение за N шагов. Оно определяется суммой положительных и отрицательных шагов, потому что частица с равными вероятностями может сделать шаг в одну или в другую сторону. Среднее равно нулю.

$$\langle \Delta x_N \rangle = \sum_{n=1}^N \langle \Delta x_n \rangle = 0$$

Рассмотрим дисперсию.

$$\langle \Delta x_N^2 \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^N \Delta x_n \sum_{m=1}^N \Delta x_m \right\rangle =$$

Далее выделим из двойной суммы все слагаемые с одинаковыми индексами. Остальная часть будет равна нулю, потому что в ней примерно поровну положительных и отрицательных слагаемых

$$\langle \Delta x_N^2 \rangle = \langle \sum_{n=1}^N \Delta x_n \sum_{m=1}^N \Delta x_m \rangle = N \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (\Delta x)^2 \rangle \frac{t}{\tau} = 2Dt$$

Здесь мы заменили число шагов на отношение времени эксперимента ко времени одного шага. Мы получили, что дисперсия будет расти линейно со временем

D — коэффициент диффузии.

Такое случайное блуждание отвечает за диффузию. Если капнуто точечную капельку броуновских частиц в вещество. Они будут случайно блуждать. Пятно будет расплываться по такому закону. Посмотрите в презентации «Броуновское движение и эргодичность». Среднее расстояние, на которое они разойдутся, будет пропорционально корню из времени. То же самое можно для ясности прочитать в книжке или пропустить, если все ясно:

§ 2. Броуновское движение

Броуновское движение считается одним из первых доказательств молекулярного строения вещества, хотя, как уже говорилось, на самом деле это не так.

Существует несколько вариантов теории броуновского движения различной степени точности. В этом параграфе мы рассмотрим наиболее простой вариант такой теории.

Будем наблюдать броуновскую частицу в микроскоп и фиксировать ее положение в поле наблюдения через равные промежутки времени Δt (рис. 2). В начальный момент частица находится в точке 0, через интервал времени Δt она переместится в положение 1. При этом она не обязательно двигается от точки 0 к точке 1 по прямой линии. По прямой она двигается только между двумя последующими соударениями с молекулами окружающей среды. Мы примем, что

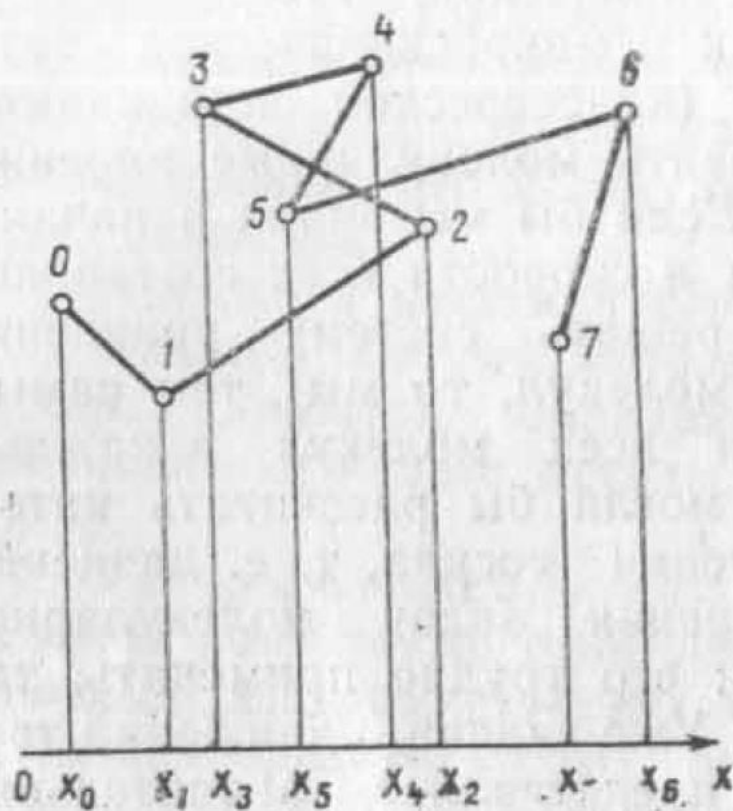


Рис. 2

время между двумя такими соударениями много меньше Δt , так что, двигаясь от точки 0 к точке 1, броуновская частица испытывает много соударений с молекулами.

Для простоты будем характеризовать положение броуновской частицы одной координатой — проекцией на некоторую произвольную ось x . Тогда в начальный момент времени частица имеет координату x , равную x_0 , в момент Δt — x_1 и т. д. Обозначим

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1 \text{ и т. д.} \quad (2.1)$$

Как далеко от начального положения x_0 сместится броуновская частица на N -м шаге наблюдений, или за время $T = N\Delta t$? Так как перемещение частицы — случайная величина, то естественно интересоваться средним отклонением броуновской частицы от начального положения $\langle x(T) - x_0 \rangle$. Разбивая весь путь, пройденный частицей за время T , на элементарные пути, т. е. учитывая (2.1), получим

$$\langle x(T) - x_0 \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \Delta x_i \right\rangle. \quad (2.2)$$

Как нетрудно показать, из определения среднего (см. § 4) следует, что среднее от суммы равно сумме средних значений

слагаемых $\sum_{i=1}^N \langle \Delta x_i \rangle$.

На каждом интервале времени Δt_i частица с одинаковой вероятностью движется и вправо и влево. Следовательно, из соображений симметрии

$$\langle \Delta x_i \rangle = 0, \quad (2.3)$$

а следовательно, и

$$\langle x(T) - x_0 \rangle = 0.$$

Найдем средний квадрат отклонения частицы от начального положения $\langle (x(T) - x_0)^2 \rangle$. Корень квадратный из этой величины характеризует среднее отклонение броуновской частицы от начального положения:

$$\begin{aligned} \langle [x(T) - x_0]^2 \rangle &= \left\langle \left[\sum_{i=1}^N \Delta x_i \right]^2 \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Delta x_i \Delta x_j \right\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так как удары молекул о броуновскую частицу следуют независимо друг от друга, приращения Δx_i на различных интервалах времени Δt_i независимы. Поэтому (см. § 4, формула (4.20))

$$\langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle = \langle \Delta x_i \rangle \langle \Delta x_j \rangle \text{ при } i \neq j. \quad (2.5)$$

В силу равенства (2.3) находим

$$\langle [x(T) - x_0]^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \Delta x_i^2 \rangle.$$

Так как температура и другие условия во всех точках одинаковы, а также одинаковы все интервалы времени, то $\langle \Delta x_i^2 \rangle = \langle \Delta x_1^2 \rangle$, и поэтому $\langle [x(T) - x_0]^2 \rangle = N \langle \Delta x_1^2 \rangle$. Напомним, что $N = T/\Delta t$, поэтому

$$\langle [x(T) - x_0]^2 \rangle = \frac{\langle \Delta x_1^2 \rangle}{\Delta t} T = 2DT, \quad (2.6)$$

где мы обозначили

$$D = \frac{1}{2} \langle \frac{\Delta x_1^2}{\Delta t} \rangle. \quad (2.7)$$

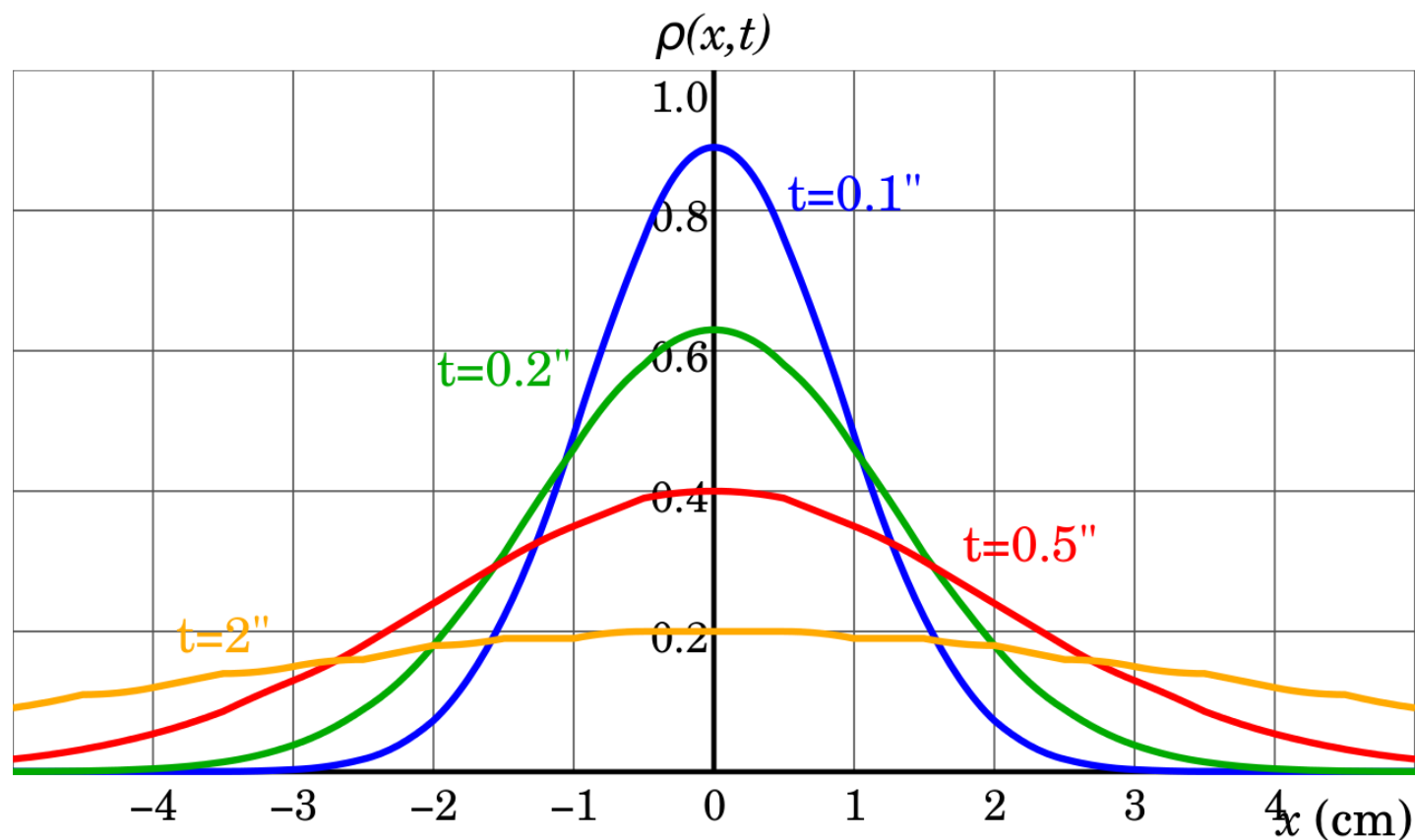
D называют коэффициентом диффузии.

Формулу (2.6) можно записать для y -й и z -й координат броуновской частицы, а затем просуммировать, и мы придем к следующему обобщению формулы (2.6) на трехмерный случай:

$$\langle [\vec{r}(T) - \vec{r}_0]^2 \rangle = 6DT. \quad (2.8)$$

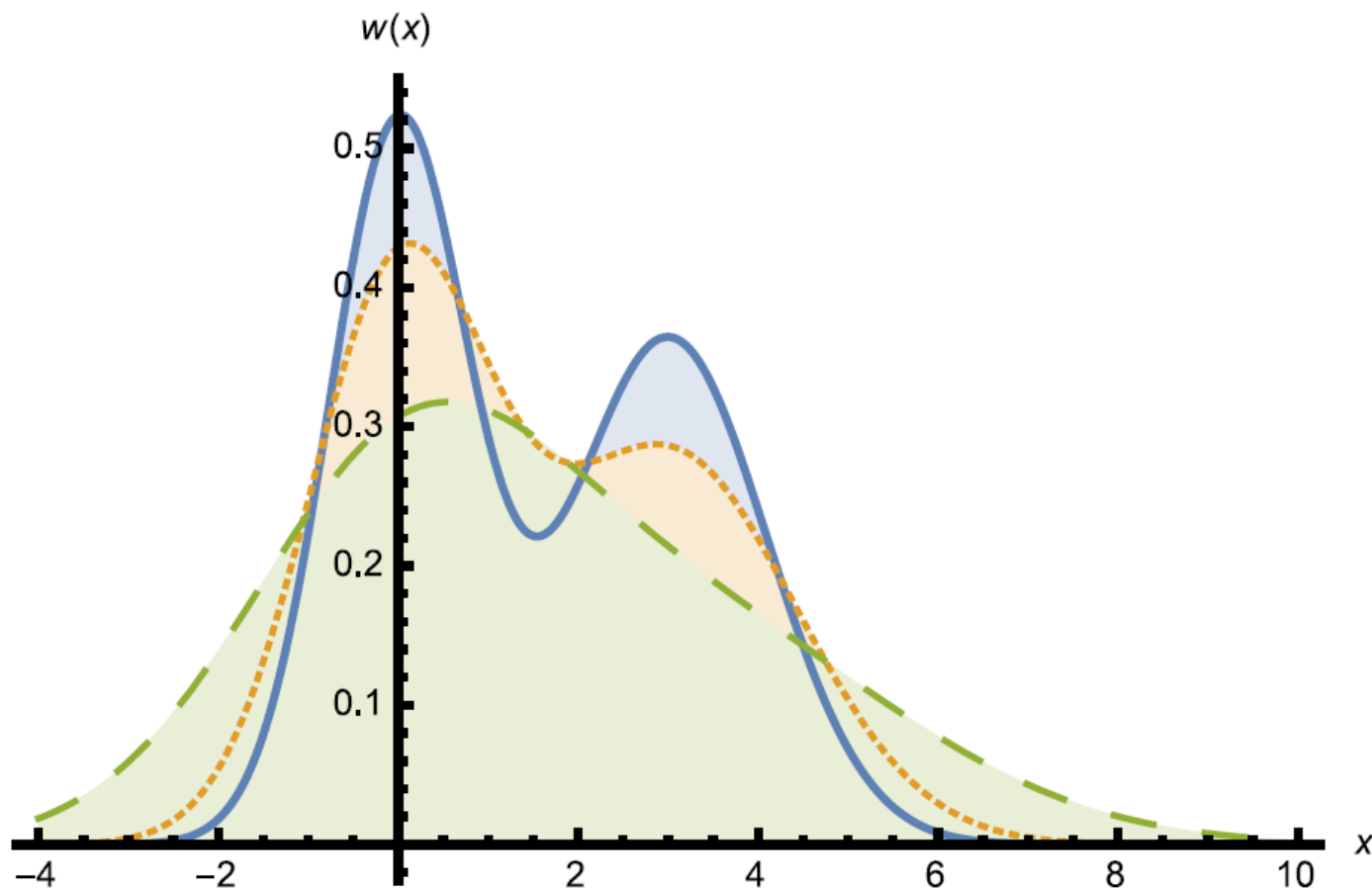
Распределение плотности частиц (а так же плотности вероятности обнаружить частицу) будет гауссовским с линейно возрастающей со временем дисперсией. То есть распределение будет расплываться со временем

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$



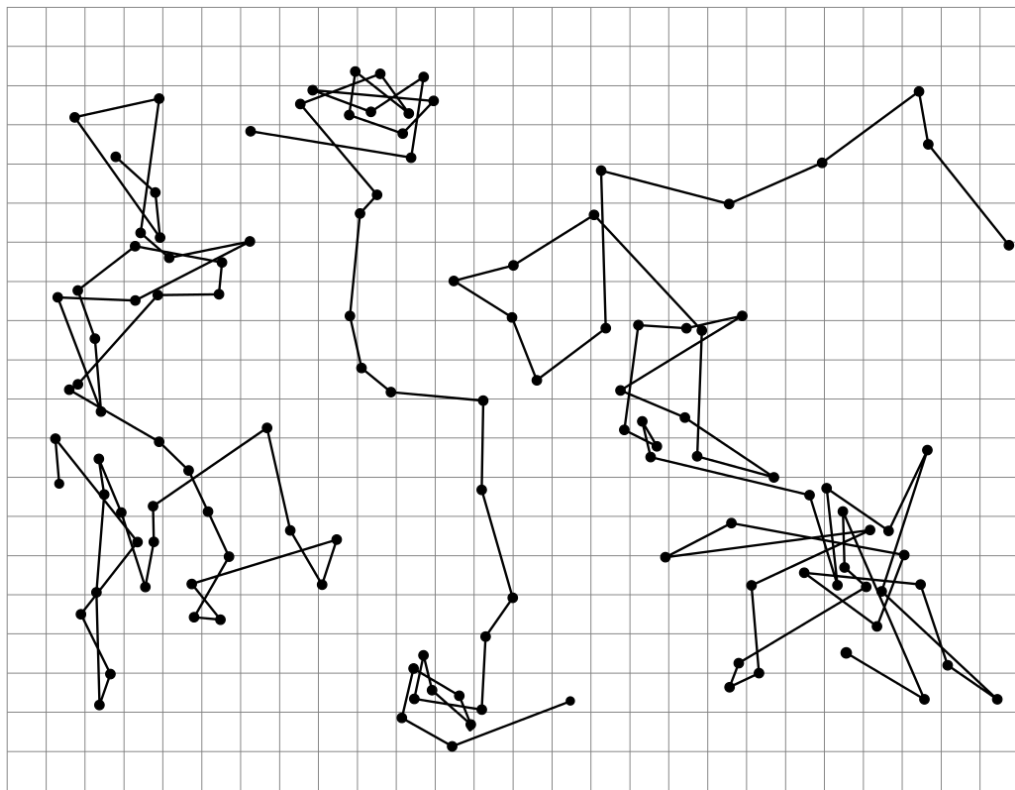
Оно является решением уравнения диффузии

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t).$$

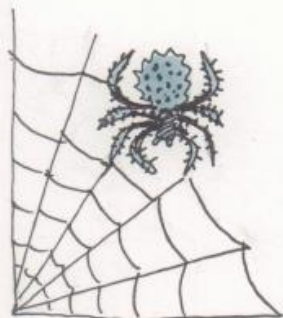
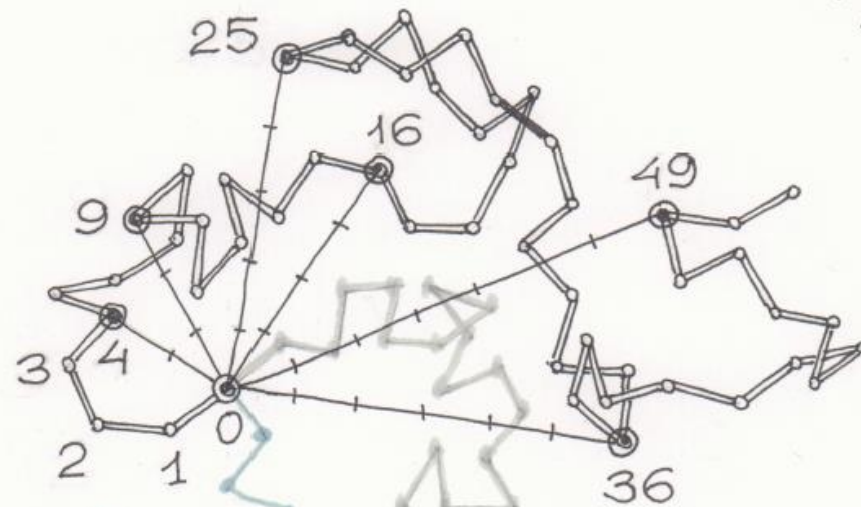
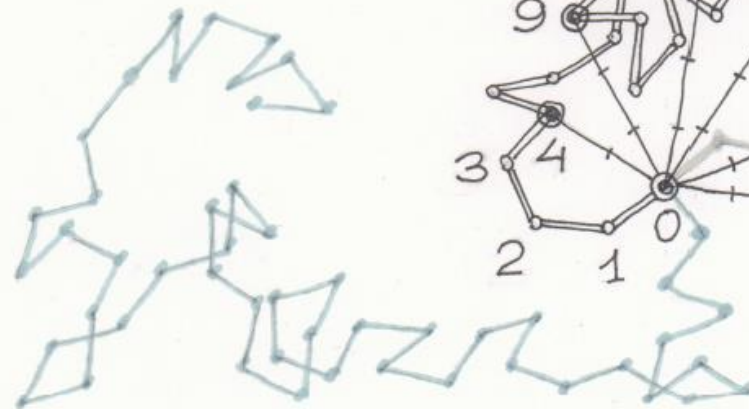


Это уравнение работает так: там, где у распределения максимум, т.е. вторая производная по координате отрицательная, там, согласно уравнению, производная по времени тоже отрицательная, то есть эта часть графика понижается. И, наоборот, впадины поднимаются. Таким образом происходит сглаживание «размазывание» всего распределения. Здесь сначала синий график, потом оранжевый, потом зеленый.

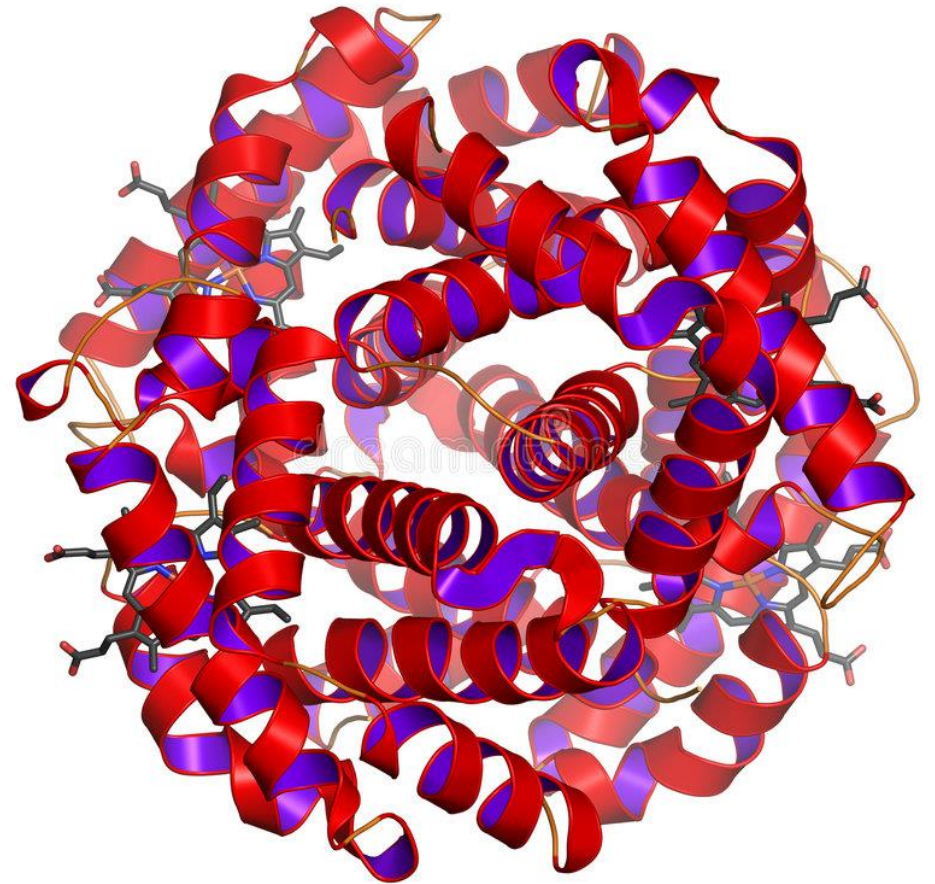
Все это рассуждение можно обобщить на случай любой размерности, например на двухмерный случай. Основная закономерность, связанная с тем, что смещение по прямой будет пропорционально корню от времени.



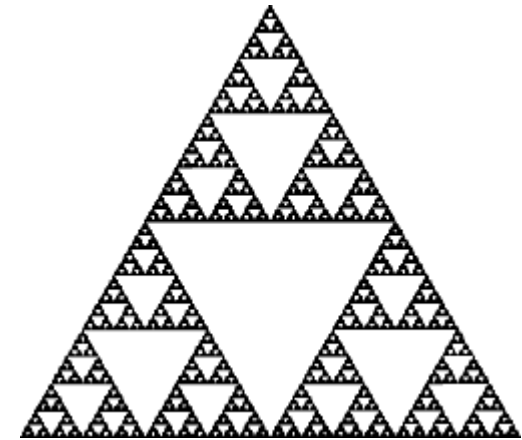
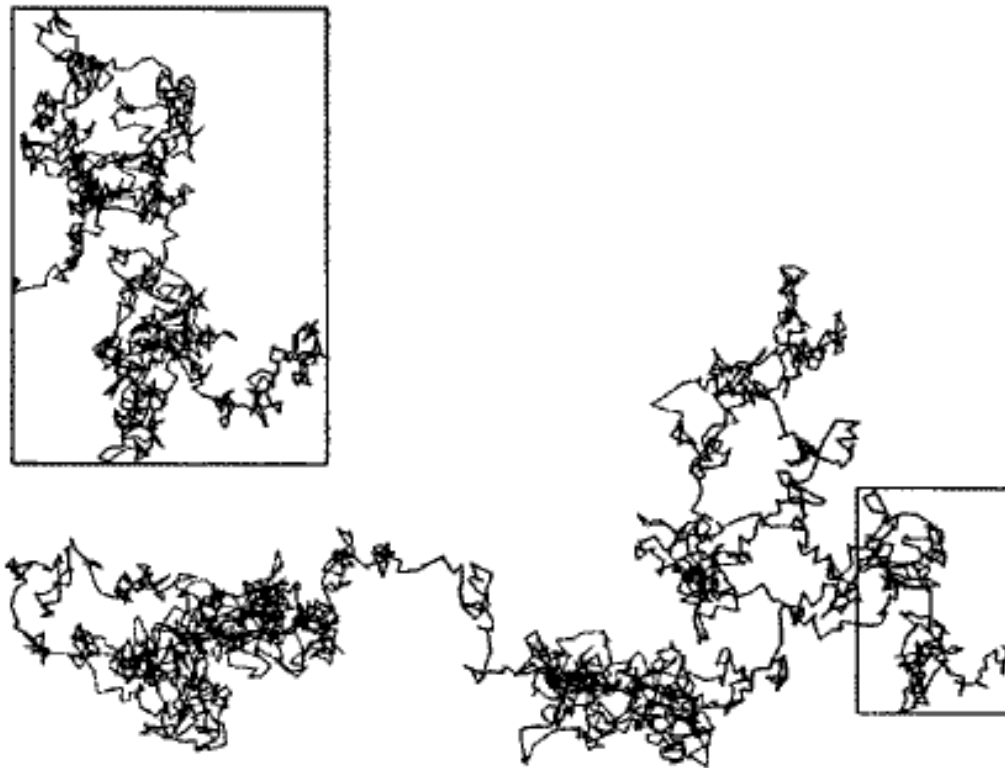
Как играли дети до компьютерных игр? Например, Разрисовывали лист всякими обозначениями приключений и начинали случайное блуждание по нему с помощью волчка. Начиная с центра делаем шаг в сантиметр в направлении указанном волчком, опять запускаем волчок, и т.д. крутить можно пузатую ручку, телефон или что-то еще. При этом попадаем на какие-то приключения и додумываем сюжет. Если пройти такие случайные маршруты много раз, потом усреднить число шагов, на которые удалось удалиться по прямой, то получится некоторая закономерность, показанная на следующем рисунке



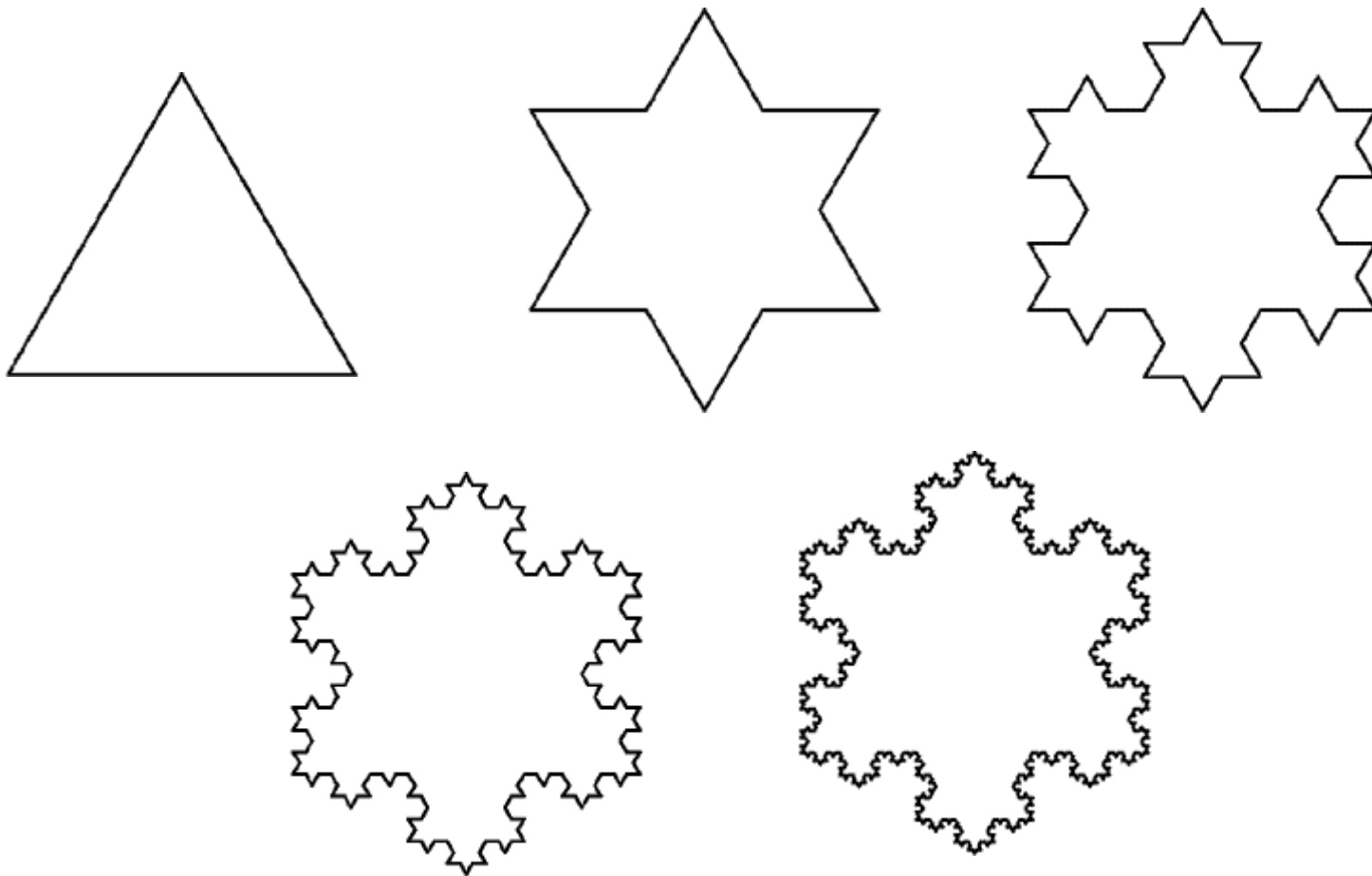
Можно обнаружить все ту же закономерность: длина траектории в шагах равна квадрату расстояния по прямой. Поэтому, например, важно, заблудившись, следить за тем, чтобы идти по прямой и не блуждать. Эта закономерность действует не только для траекторий, но и для структур. Представим себе, что это линейный полимер, состоящий из узлов в виде шарниров и стержней между ними. В тепловом движении это полимер свернется в глобулу, размер которой примерно равен корню из его длины.

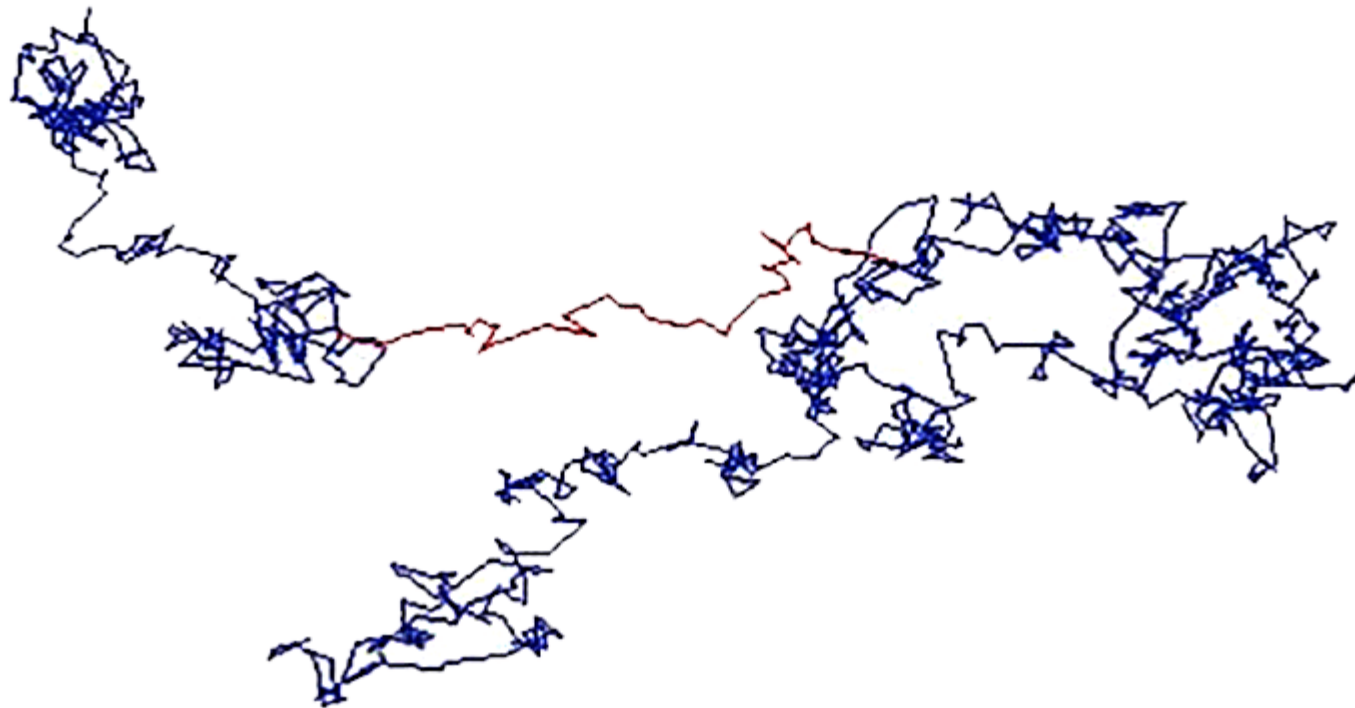


Для траекторий броуновской частицы свойственна фрактальность. Это означает масштабную инвариантность. Небольшой фрагмент, если его увеличить, выглядит так же, как вся траектория. Фракталы имеют дробную размерность. Мы видим, что траектория как бы заштриховывает часть поверхности, то есть это уже не одномерная линия, но и не двумерная поверхность. Треугольный фрактал Серпинского – еще пример фрактала с размерностью больше одного, но меньше двух, но тут мы движемся от двумерного треугольника, вырезая кусочки.



Еще пример геометрического, неслучайного фрактала



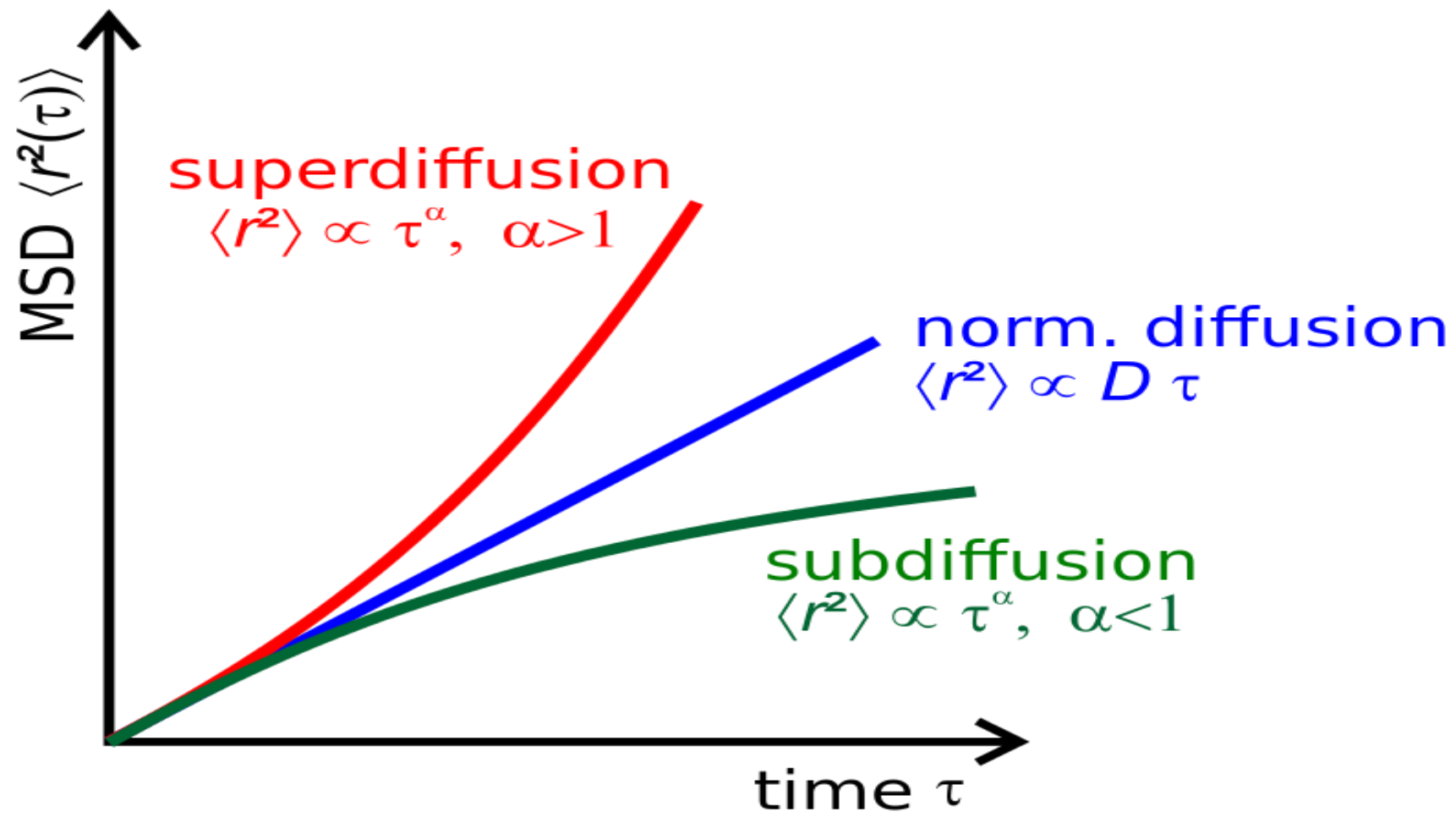


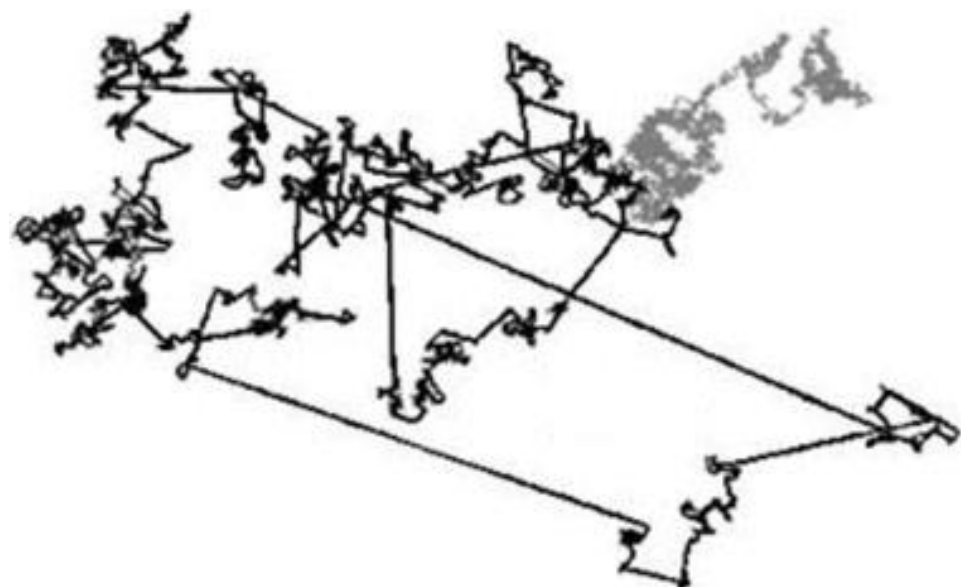
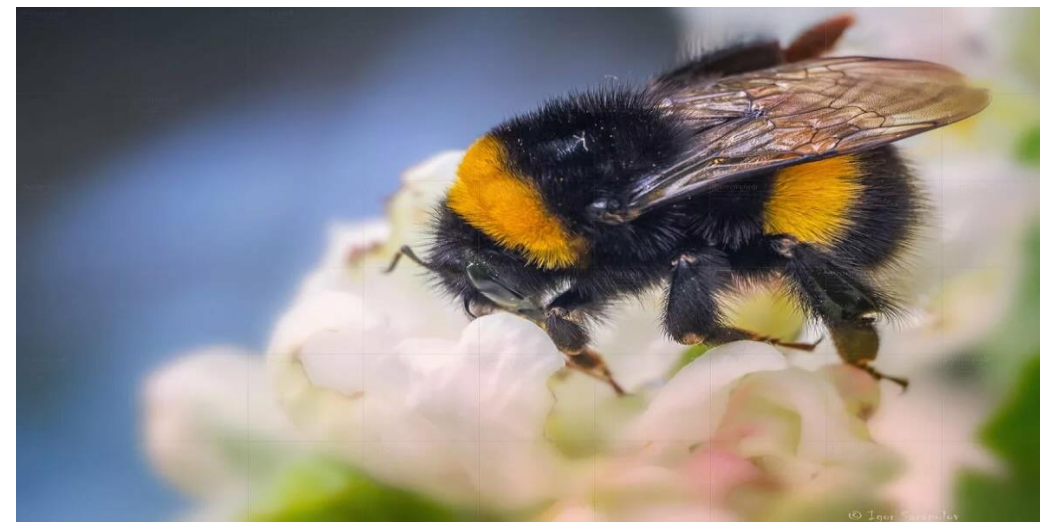
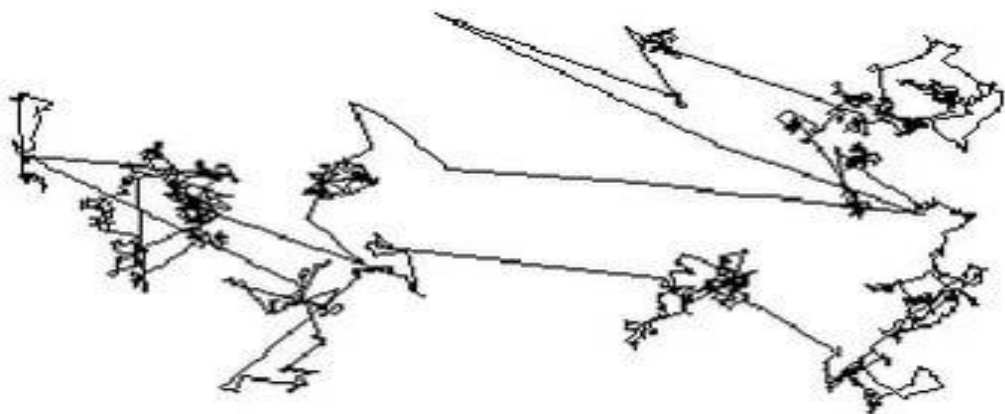
Французские учёные Буазигье и Даан (*Bouzigues* и *Dahan*), исследовавшие перемещение рецепторов γ -аминомасляной кислоты (ГАМК) в мембранах нервных клеток, предложили методику статистического анализа траекторий движения молекул, позволяющую очень чётко разделить простое броуновское «блуждание» молекулы от направленного движения.

Наряду с обычной диффузией, когда квадрат смещения пропорционален времени есть аномальная диффузия

$$\langle \Delta x_N^2 \rangle \sim t^\nu.$$

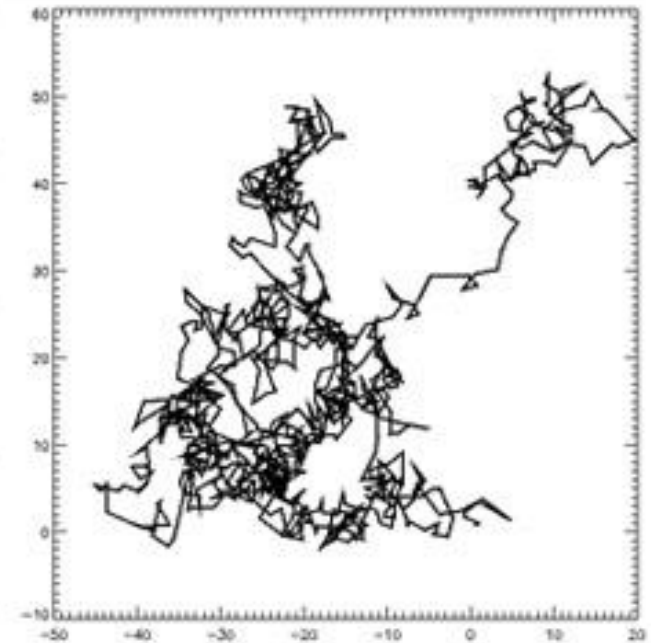
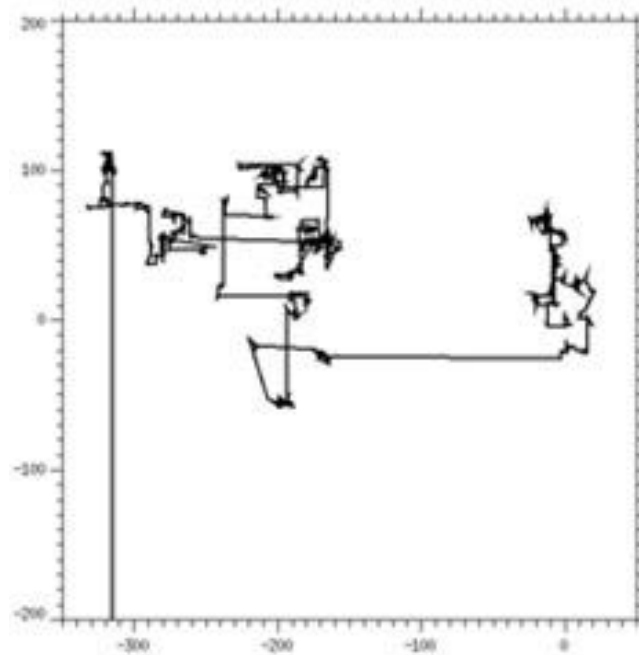
Если $\nu > 1$, то супер-
если $\nu < 1$ — субдиффузия

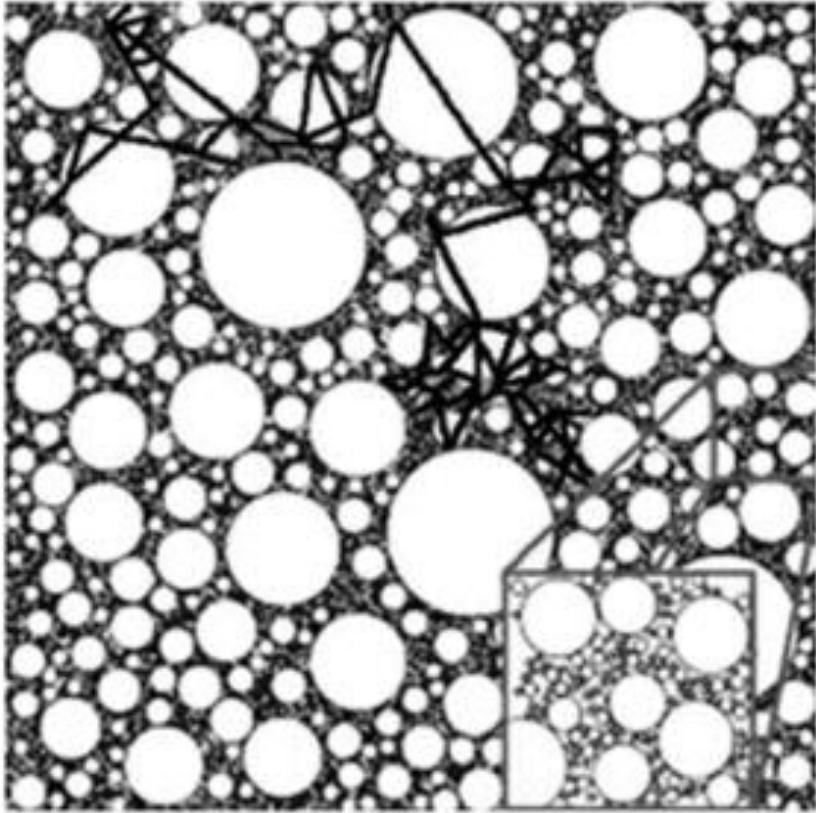




Один из механизмов супердиффузии – это наличие гигантских скачков, они называются полетами Леви. Например, многие животные движутся так для оптимального поиска пищи

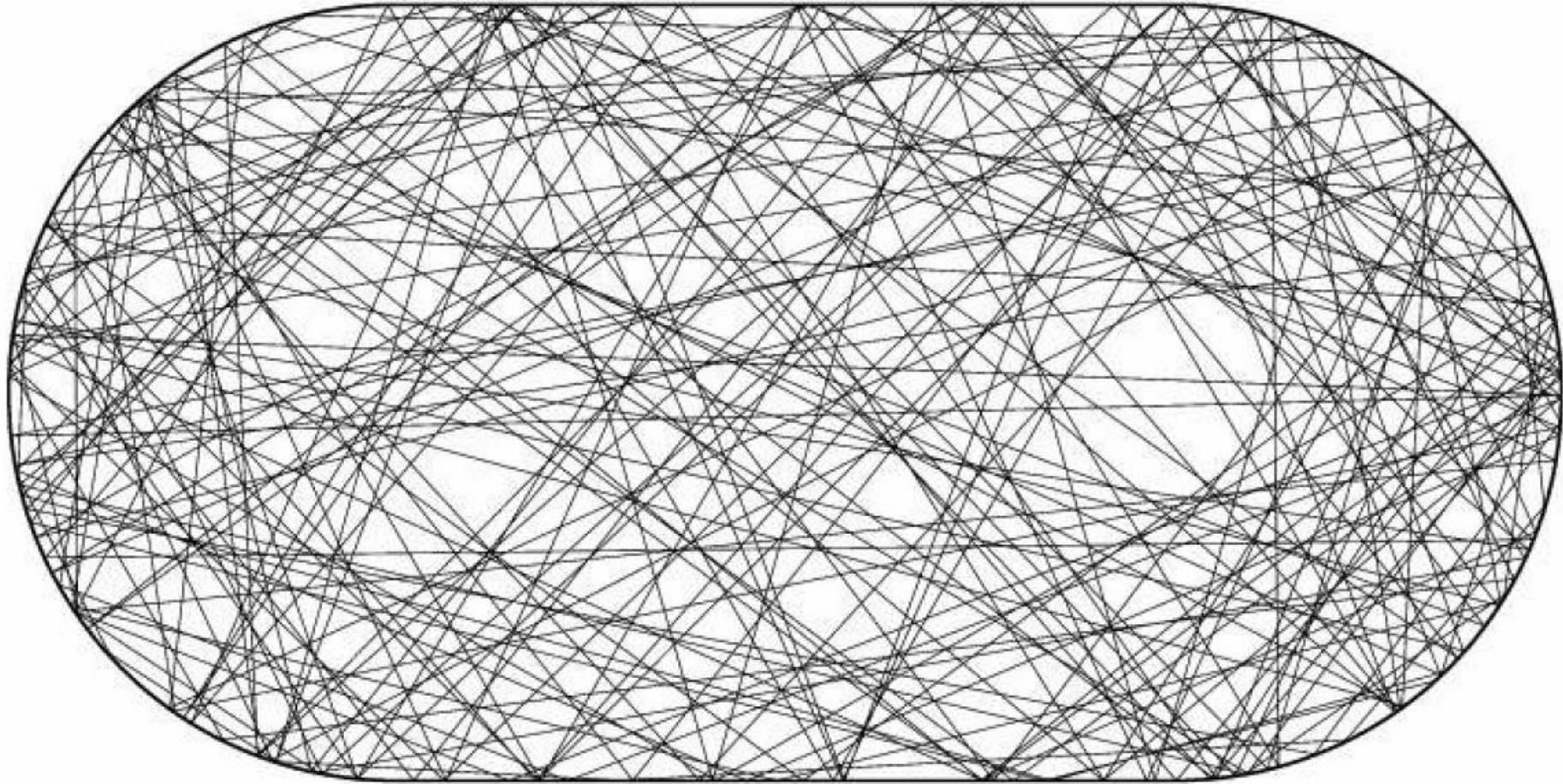
Дэвид Симс из университета Плимута и его коллеги утверждают, что получили убедительные доказательства использования полетов Леви как тактики перемещения 14 видами морских хищников, среди которых голубая (*Prionace glauca*) и китовая (*Rhincodon typus*) акулы, желтоперый тунец (*Thunnus albacares*), рыба-меч (*Xiphias gladius*) и некоторые другие.



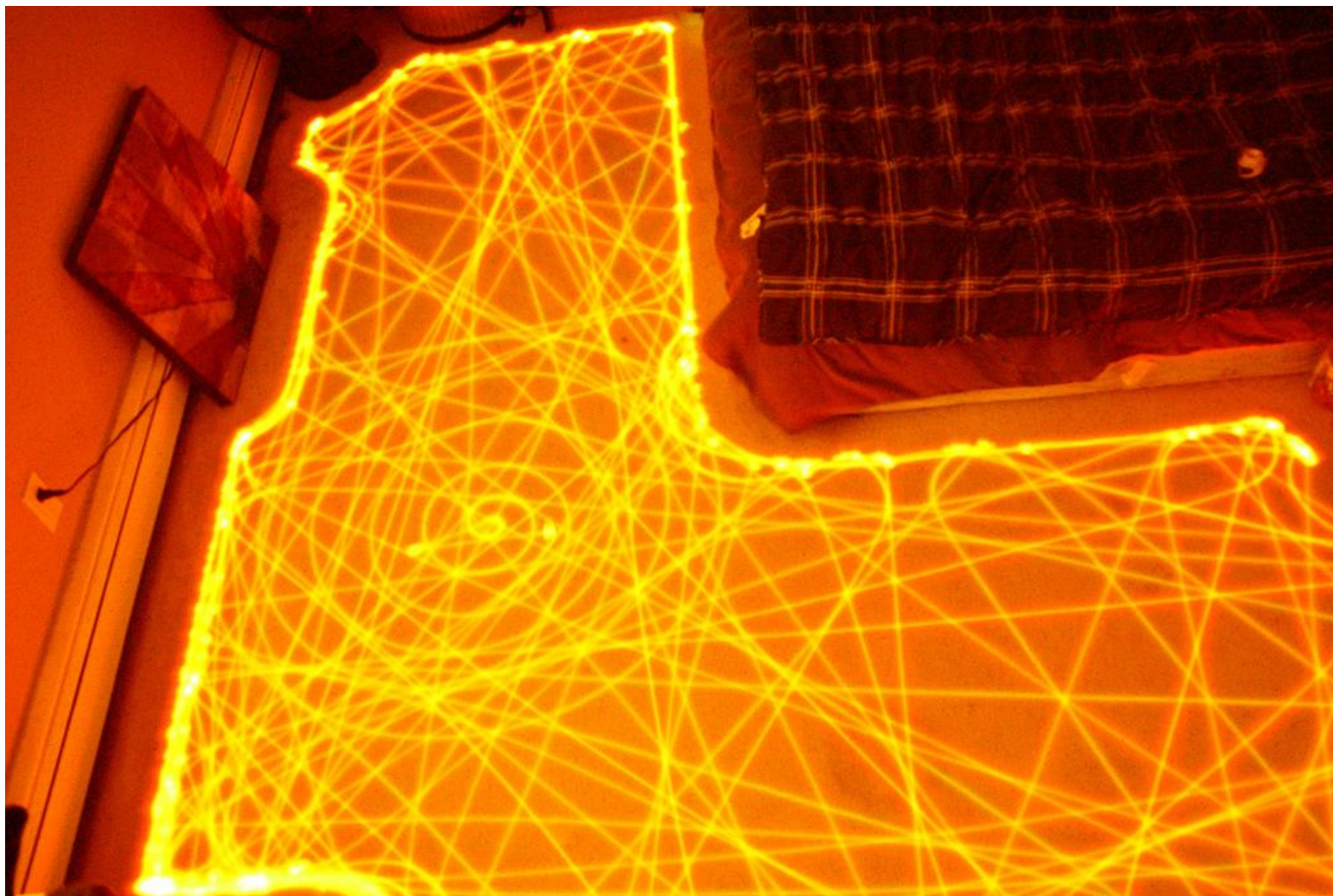


Суб диффузия возникает тогда, когда есть ловушки, в которых частица может застрять на большое время. Например, траектории случайного блуждания в пористом стекле самоподобной структуры (стекло Леви): сильные флуктуации скачков.

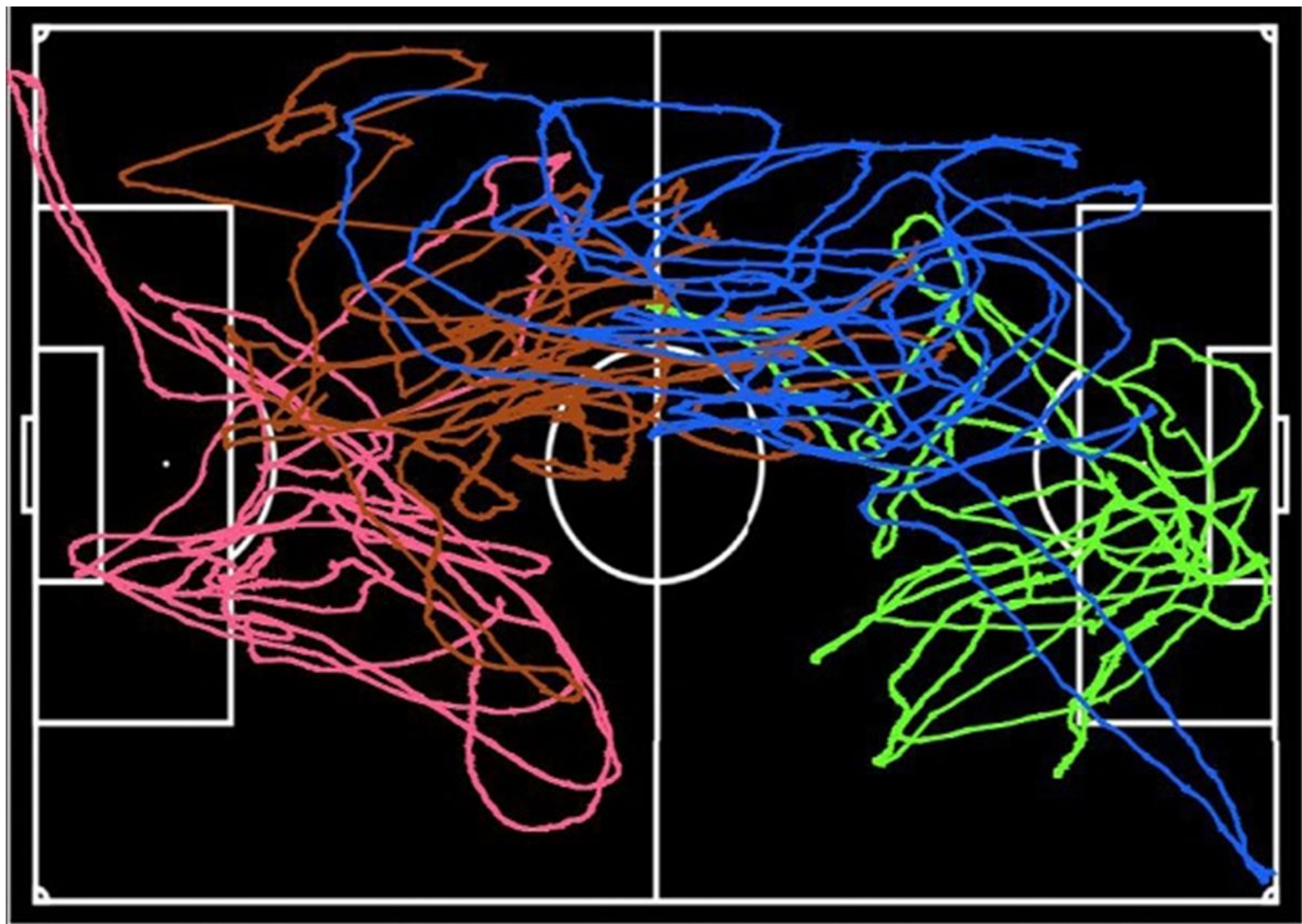
Другие примеры случайных блужданий: например, движение частицы в бильярде от стенки до стенки тоже может быть случайным



Движение робота-пылесоса сочетает упорядоченные фрагменты траектории и случайные для максимального охвата пройденной территории



В траектории движения игроков в любительский футбол тоже есть сочетание закономерности и случайности

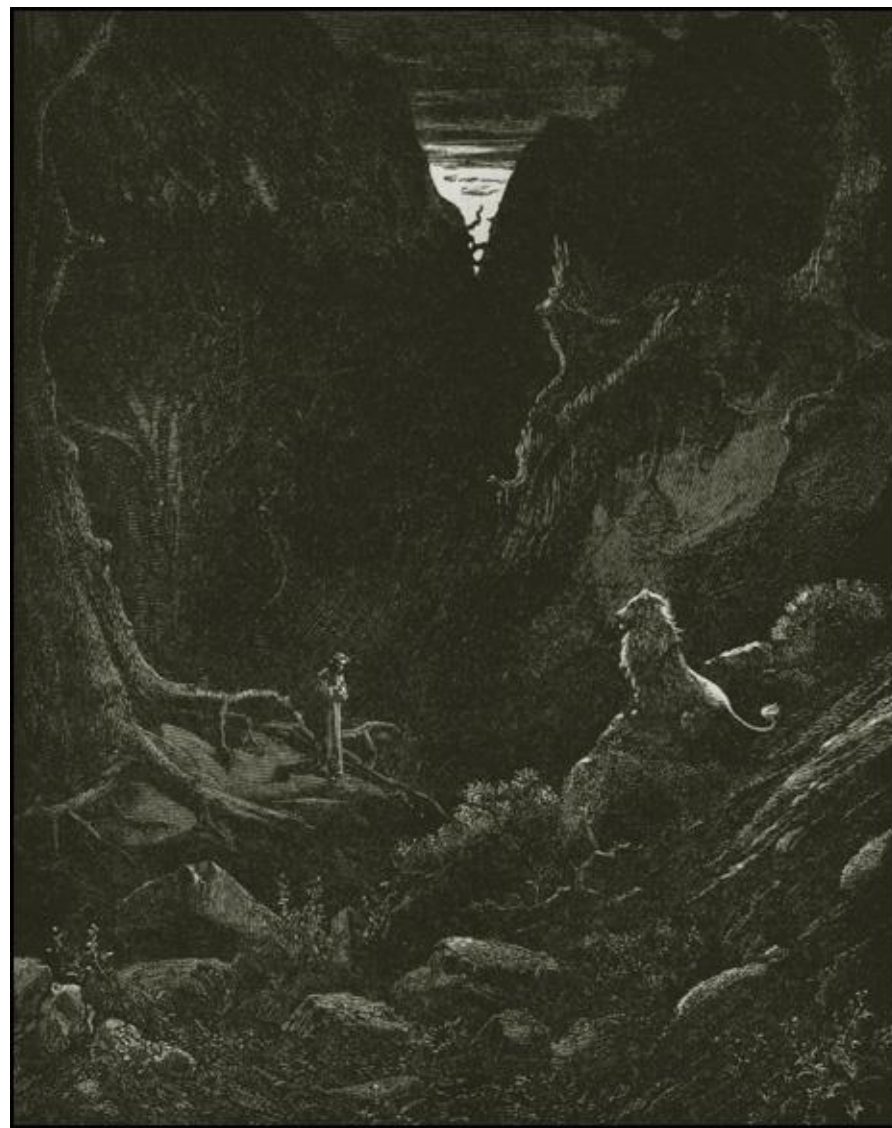


Блуждания в лабиринтах – важный элемент литературных произведений.

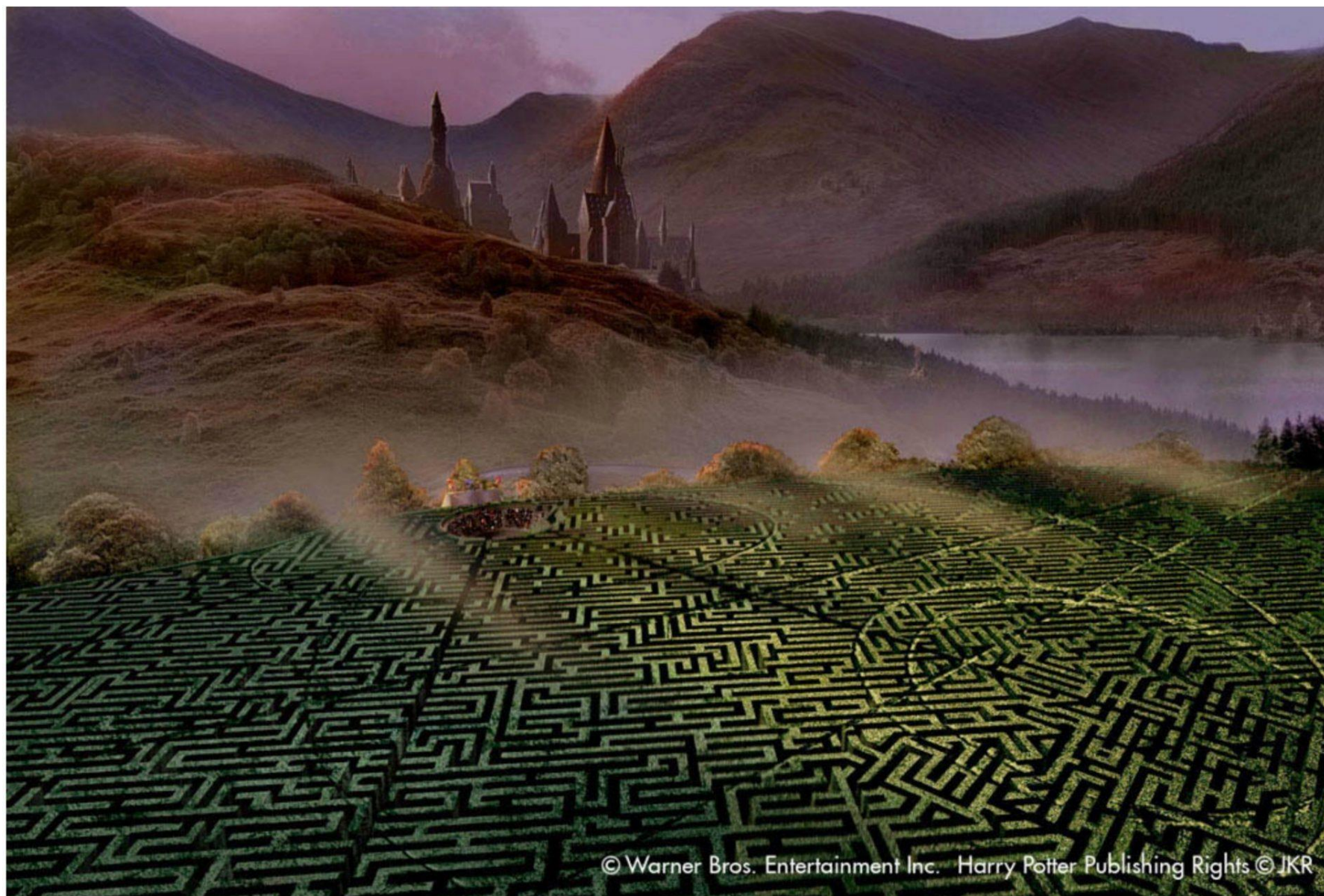


Часто эти блуждания символизируют поиски смыслов, себя, спасения. Как, например, у Данте





Огромную роль лабиринты и блуждания в них играют в приключенческих сюжетах и играх



Задания на выбор (достаточно одного, но здорово, когда больше)

Задача

Частица делает скачки длиной в 1 сантиметр. После каждого скачка она меняет направление движения случайным образом. Найдите с помощью вычислений и экспериментально, на какое в среднем расстояние она удалится от точки начала движения за 25 шагов, за 36 шагов, за 49 шагов.

Задача

Проверьте путем дифференцирования по времени и по координате распределения Гаусса с растущей амплитудой, что оно является решением уравнения диффузии.

тема для эссе

Сравните блуждания различных литературных героев (например, сумрачный лес у Данте, Хэмптон-Кортский лабиринт у Джерома).

тема для эссе

Приведите примеры случайных блужданий и какие-то их статистические характеристики.

графическое задание

Изобразите на основе случайной траектории некоторый узнаваемый предмет или существо.

Совсем творческое задание

Изобразите карту приключений, совершите по ней случайное блуждание с помощью волчка и опишите ваши приключения в виде рассказа.