

. Квазипериодические процессы и структуры с переменной амплитудой.

Рассмотренный нами на предыдущей лекции одношаговый марковский процесс можно представить как набор скачков влево (величина уменьшается на единицу) или вправо (увеличивается) с определенными вероятностями. На рисунке это будет выглядеть как график с импульсами вверх и вниз.

Таким образом мы переходим к изучению более сложной модели импульсных процессов, в которых случайными или неслучайными могут быть не только моменты появления импульсов, но и их амплитуды. В частности, знак: положительный — импульс вверх, или отрицательный — импульс вниз.

На рисунках 1 — 5 представлены 10 различных импульсных процессов (ИП) с положительными и отрицательными δ -импульсами $\eta(t) = \sum_p a_p \delta(t - t_p)$, происходящими в момент времени t_p и имеющими амплитуду a_p . Момент появления импульса и амплитуда могут быть случайными величинами. Попробуем разобраться, какие именно процессы они описывают. Ответы есть в презентации.

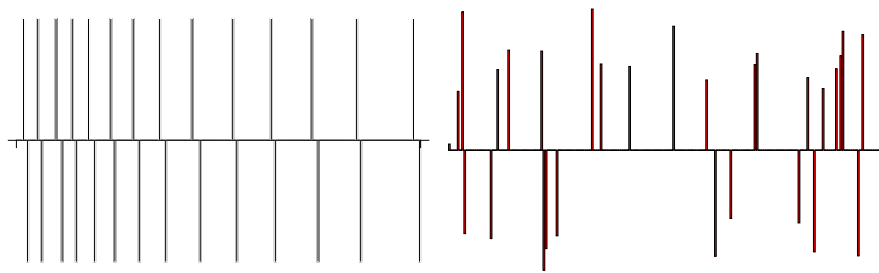


Рис. 1: А (левый). В (правый)

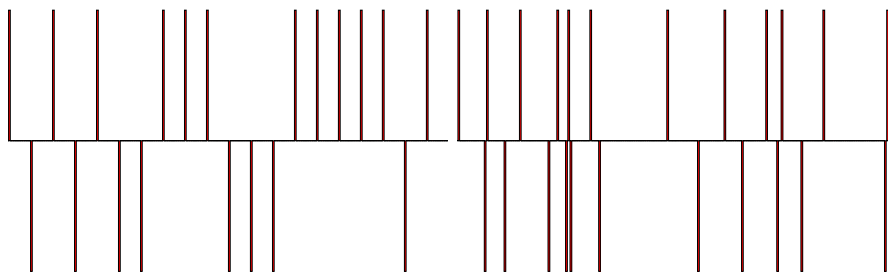


Рис. 2: А (левый). В (правый)

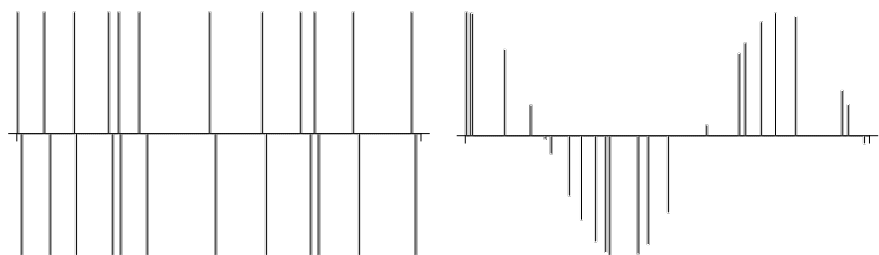


Рис. 3: А (левый). В (правый)

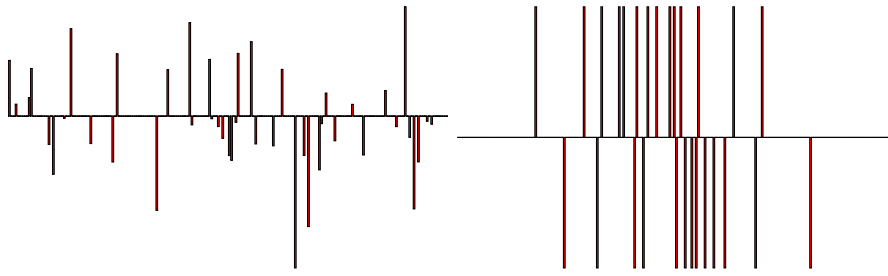


Рис. 4: А (левый). В (правый)

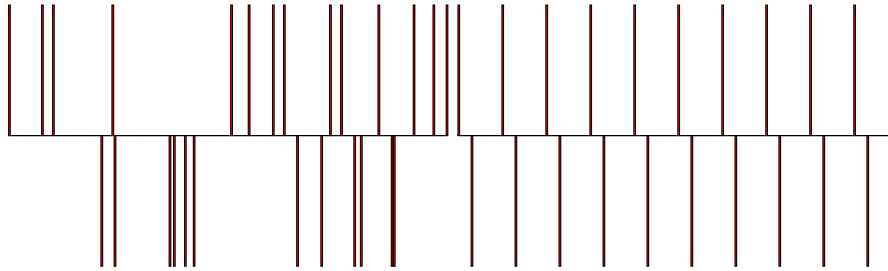


Рис. 5: А (левый). В (правый)

Например, рассмотрим ИП, который описывает моменты соударений броуновской частицы с другими хаотически движущимися частицами, толкающими ее в положительном (импульс вверх) и отрицательном (импульс вниз) направлениях вдоль оси OX . Очевидно, что эти удары совершенно случайны и независимы и по времени и по направлению. Если присмотреться к процессам на картинке, то на многих из них можно увидеть некоторую закономерность. Самым случайным и соответствующим донному процессу будет график 5А.

0.1 процесс

Доска Гальтона представляет из себя вертикальную доску со штырьками, расположенными рядами таким образом, что шарик падает сначала на верхний штырек, так, что вероятности скатиться с него вправо и влево равны. В результате он попадает на один из штырьков в следующем ряду и, опять, с равными вероятностями падает левее или правее в следующий ряд. Времена переходов из ряда в ряд одинаковые. ИП описывает горизонтальную скорость движения шарика. Найдите этот процесс на рис. 1 — 5. Для наглядности можно посмотреть презентацию Доска Гальтона на сайте <http://genphys.phys.msu.ru/rus/lecdemo/MolPhys/index.html>

0.2 процесс

Из точечного источника в начале координат на двухмерную поверхность одновременно запускается несколько броуновских частиц. Они совершают хаотическое движение под действием тепловых флуктуаций, при этом могут сталкиваться друг с другом. Кольцо на этой поверхности, ограниченное двумя окружностями с центрами в точке источника снабжено датчиками, фиксирующими появление частицы в кольце и выход из него. Для наглядности можно посмотреть презентацию Броуновское движение и эргодичность на сайте <http://genphys.phys.msu.ru/rus/lecdemo/MolPhys/index.html>

Опишите скорость изменения числа частиц в кольце как квазипериодический нестационарный импульсный случайный процесс. Найдите его на рис. 1 — 5.

0.3 процесс

ИП описывает изменение проекции скорости броуновской частицы в газе в результате ударов других молекул. Найдите этот процесс на рис. 1 — 5. Для наглядности можно посмотреть презентацию на сайте <http://genphys.phys.msu.ru/rus/lecdemo/MolPhys/index.html>



Рис. 6: Модель двухмерного движения броуновских частиц от источника через кольцо

0.4 процесс

В стакан с газированной водой бросили маленький кусочек молочного (жирного) шоколада. Шоколад тонет, через некоторое время всплывает на поверхность, потом опять тонет и так далее. Опишите скорость шоколада как квазипериодический нестационарный импульсный случайный процесс. Найдите его на рис. 1 — 5.

0.5 процесс

В сосуде с молекулами идеального газа есть воображаемая или реальная, но полупрозрачная, перегородка перпендикулярная оси OX . ИП описывает моменты пересечения молекулами этой перегородки в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси OX . Найдите на рис. 1 — 5 процесс, соответствующий следующим ситуациям: Для наглядности можно посмотреть презентацию на сайте <http://genphys.phys.msu.ru/rus/lecdemo/MolPhys/index.html>

1. Пересечение единственной частицей в сосуде воображаемой перегородки
2. Пересечение одной выделенной из многих частицей в газе воображаемой перегородки
3. Пересечение любой частицей в газе воображаемой перегородки.

0.6 процесс

Броуновская частица совершает переходы между двумя потенциальными ямами под действием тепловых шумов. При этом она большую часть времени находится в той или другой потенциальной яме, причем, чем глубже яма, тем дольше среднее время пребывания в ней частицы. ИП описывает переходы через потенциальный барьер в ту или иную сторону. Найдите этот процесс на рис. 1 — 5. Рассмотрите так же случай двух ям одинаковой глубины. Похожую задачу мы уже сейчас рассмотрели. Найдите ее среди разобранных.

0.7 процесс

Квазипериодические импульсные процессы удобны для описания истории некоторых культур. Например, древнегреческий историк Геродот утверждал, что история любого народа развивается циклами. В начале идет успех (импульс вверх), но он вызывает гордыню и стремление рисковать. Это вызывает поражение (импульс вниз). Это приводит к раскаянию и возможности нового успеха и т.д. Древние греки представляли себе время движущимся по кругу. Для древних иудеев, наоборот, время — это вытянутая линия от



Рис. 7: Модель частицы, совершающей переходы между двумя потенциальными ямами под действием тепловых шумов

завета Бога с человеком до ожидаемого прихода Миссии. Хотя и в библейской истории можно усмотреть при желании некоторую цикличность. Народ развращается, забывает Бога, Он с помощью пророков и всяческих бедствий приводит народ к покаянию.

0.8 Квазипериодические структуры

Примером квазипериодической структуры может быть крепостная стена древнего города. Башни идут на расстояниях, определяемых, например, дальностью полета стрелы. Но структура далеко не строго периодическая. На нее влияет рельеф местности, расположение вражеских стран, порта, дорог и многое другое.

В архитектуре часто стоит задача преодолеть скучную периодичность оград, лестниц, окон многоквартирного дома. Или, наоборот, подчеркнуть и сделать ее более выразительной. На картинках много примеров знаменитых лестниц и оград. То же можно сказать и про орнаменты. Даже при построении строго геометрических орнаментов художник ищет способ сделать их живее, нарушая формальный закон.

Это делает их больше похожими на природные объекты, которые никогда не бывают строго периодическими. Периодичность паутины даже используется как индикатор состояния паука. С помощью них испытывают всякие психотропные вещества, имеющиеся в малом количестве. Дают пауку и смотрят, какую он сделает паутину. От веществ, например, концентрирующих внимание, получается строго периодическая паутина.

1 Задания на выбор

1.1 Темы для эссе

Квазипериодичность в архитектуре (ограды, лестницы, окна)

или

Квазипериодичность в поэзии (стихотворный размер, система рифмовки, ритм)

или

Квазипериодические структуры в живой природе (паутины, растения, мех животных, раковины)

Что является причиной периодичности, а что случайности? Какие крайние проявления периодичности или, наоборот, ее нарушения? Что такое красота с точки зрения степени периодичности?

1.2 Графическое задание

Создать арт-объект на основе квазипериодической структуры. При этом можно использовать предложенные графики на рис. 1 — 5 за основу

1.3 задача

В стакан с газированной водой бросили маленький кусочек молочного (жирного) шоколада. Шоколад тонет, через некоторое время всплывает на поверхность, потом опять тонет и так далее.

1. Изобразите условно разные стадии процесса
2. Укажите причины возникновения периодичности процесса и факторы, увеличивающие степень периодичности.
3. Укажите причины возникновения случайности процесса и факторы, увеличивающие степень случайности.
4. Укажите причины нестационарности процесса и условия, при которых процесс можно моделировать как стационарный на некотором интервале времени.
5. Как условный период квазигармонических колебаний зависит от массы, жирности и размера шоколада, высоты уровня газировки, концентрации газов в ней?
6. Как амплитуда импульсов квазигармонических колебаний зависит от массы, жирности и размера шоколада, высоты уровня газировки, концентрации газов в ней?
7. Что изменится, если вместо куса шоколада, который может случайно вращаться как игральный кубик, взять пластилиновый шарик с такими же гидрофобными свойствами?
8. Что изменится, если кусок шоколада кинуть не в стакан, а в аквариум с устройством постоянной подачи углекислого газа?
9. При каких условиях скорость шоколада может быть приближенно описана как дихотомический шум?

1.4 задача

Из точечного источника в начале координат на двухмерную поверхность одновременно запускается несколько броуновских частиц. Они совершают хаотическое движение под действием тепловых флуктуаций, при этом могут сталкиваться друг с другом. Кольцо на этой поверхности, ограниченное двумя окружностями с центрами в точке источника снабжено датчиками, фиксирующими появление частицы в кольце и выход из него. Для наглядности можно посмотреть презентацию Броуновское движение и эргодичность на сайте <http://genphys.phys.msu.ru/rus/lecdemo/MolPhys/index.html>

1. Изобразите условно разные стадии процесса
2. Укажите причины возникновения периодичности процесса и факторы, увеличивающие степень периодичности.
3. Укажите причины возникновения случайности процесса и факторы, увеличивающие степень случайности.
4. Укажите причины нестационарности процесса и условия, при которых процесс можно было бы моделировать как стационарный на некотором интервале времени.
5. Как условный период зависит от массы и размера броуновских частиц, радиусов, температуры и интенсивности источника?
6. Как амплитуда импульсов зависит от массы и размера броуновских частиц, радиусов, температуры и интенсивности источника?

7. Что изменится, если вместо броуновских частиц будут выпущены частицы, движущиеся по радиальным прямым с постоянной скоростью?
8. Что изменится, если источник броуновских частиц будет работать с постоянной интенсивностью?
9. При каких условиях изменение числа частиц в кольце может быть приближенно описано как дихотомический шум?

1.5 Корреляции обновляемого процесса

Корреляционная функция стационарного процесса определяется следующим образом

$$\langle x(t)x(t+\tau) \rangle - \langle x(t) \rangle \langle x(t+\tau) \rangle.$$

Время корреляции обновляемого процесса должно обладать следующими свойствами. Оно равно нулю при Пуассоновском процессе (отсутствие корреляций), оно стремится к среднеквадратичному отклонению при супер-пуассоновском процессе (положительные корреляции импульсов). Оно стремится к бесконечности в периодическом пределе (отрицательные корреляции импульсов). Для оценки времени корреляции можно предложить следующую полуфеноменологическую формулу

$$\tau_c = \frac{(\sqrt{\sigma_{\vartheta}^2} - T)^2}{\sqrt{\sigma_{\vartheta}^2}}.$$

Соответствие этого определения самому общему свойству времени корреляции, а именно тому, что за это время корреляционная функция убывает заметным образом, можно проверить на примере тех процессов, для которых корреляционная функция вычисляется аналитически.

Задание на свойства импульсных процессов.

Укажите, какие из процессов на рис 1 — 5 соответствуют каждому из перечисленных ниже свойств. Каждому свойству может соответствовать несколько или несколько процессов. Достаточно сделать только 6 пунктов на выбор.

1. Нестационарный ИП
2. Распределение вероятностей для расстояний между соседними импульсами $\vartheta_p = t_p - t_{p-1}$ является δ -функцией
3. Распределение вероятностей для расстояний между соседними импульсами ϑ_p является экспоненциальным
4. Распределение вероятностей для амплитуд импульсов $w(a_p)$ является нормальным (гауссовским)
5. ИП со случайными равновероятными положительными и отрицательными импульсами (РПОИ) $P(a_0) = P(-a_0) = 1/2$ и пуассоновской статистикой моментов появления импульса (ПСМПИ)
6. ИП с РПОИ и строго периодическим появлением импульсов (СППИ) $\vartheta_p \equiv T$
7. ИП с чередующимися положительными и отрицательными импульсами (ЧПОИ) $a_p = a_0$, если p — четное; $a_p = -a_0$, p — нечетное и ПСМПИ
8. ИП с ЧПОИ и СППИ
9. δ -коррелированный ИП
10. Производная от телеграфного сигнала (его так же называют дихотомическим шумом)
11. Строго периодический ИП
12. ИП, для которого $S(0) = 0$
13. ИП с ненулевым средним
14. Распределение вероятностей для амплитуд импульсов $w(a_p)$ является δ -функцией
15. Для этого ИП не выполняется соотношение $K(\tau) = K(-\tau)$
16. ИП с бесконечным временем корреляции
17. ИП с ПСМПИ (пуассоновской статистикой моментов появления импульса) и гармонической модуляцией амплитуд $a_p = a_0 \cos(\omega t_p)$.