

Марковские процессы

Марковскими называются процессы, в которых каждое следующее значение случайной величины зависит от только предыдущего и не зависит от предыстории. Рассмотрим такой пример

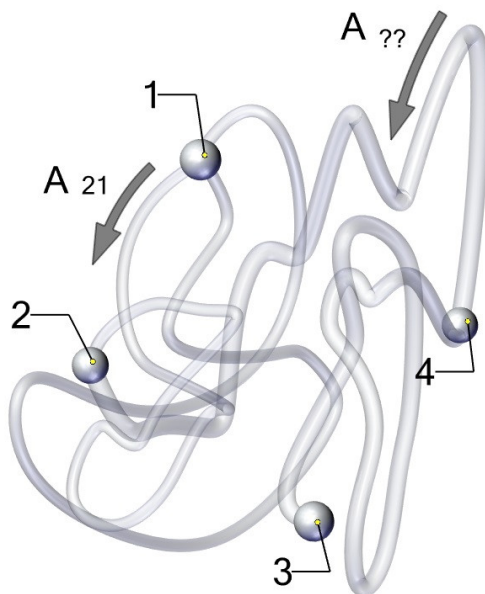


Рис. 1: Модель процесса марковских переходов между четырьмя состояниями системы

На рисунке представлен лабиринт для экспериментов над жуками. Изначально жук находится в одной из четырех круглых камер с номерами. На каждом временном шаге жук вбегает в один из выходящих из камеры коридоров и пробегает его до конца. Прибежав в новую камеру, он начисто забывает, откуда он пришел. Выбор жуком коридора совершенно произвольный, то есть все возможные выходы из камеры равновероятны, но куда-то он точно побежит. Это пример дискретного марковского процесса. Случайная величина — номер камеры.

Этот процесс можно полностью описать с помощью графа со стрелочками, соответствующими каждому из возможных переходов

Пусть P_{jk} вероятность перехода из k -го состояния в j -е. Обратите внимание, что индексы нумеруются в обратном порядке. Это нужно для того, чтобы было удобно применять теорию матриц. Одинаковые индексы описывают вероятность перейти в то же состояние. с помощью этих процесс блуждания жука можно представить как матрицу, где в первом столбце стоят вероятности переходов из первого состояния (камеры) в себя и осталь-

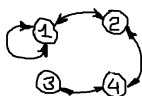


Рис. 2: Граф марковских переходов между четырьмя состояниями системы

ные три состояния по порядку. Их сумма всегда равна единице. Во втором столбце, стоят вероятности переходов из второго состояния и т.д.

Выберем правильную матрицу $\|P_{jk}\|$ вероятностей переходов из k -го состояния в j -е, соответствующую нашему графу. Видим, что из первого состояния возможны переходы в него же, причем двумя способами, или во второе состояние. Все три варианта переходов равновероятны и равны $1/3$. Тогда вероятность остаться в итоге в том же первом состоянии будет $2/3$. Тогда в первом столбце будут сначала $2/3$, потом $1/3$, потом нули. Поверьте, что остальные столбцы в четвертой матрице тоже соответствуют графу

$$\begin{aligned}
 &1) \begin{pmatrix} 3/4 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/4 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/4 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \\
 &3) \begin{pmatrix} 5/6 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/6 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad 4) \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 &5) \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 6) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/6 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/6 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Одно из возможных заданий связано с этими матрицами:

1. Выберите правильную матрицу переходов для эксперимента над менее активным сытым жуком, в котором он с равными вероятностями может пойти по любому доступному из данной камеры коридору или остаться в ней.
2. Выберите правильную матрицу переходов для эксперимента над сонным жуком, в котором он с равными вероятностями может пойти куда-то или остаться в камере, а если пойдет, то все доступные из данной камеры коридоры равновероятны.

3. Для оставшихся невыбранных трех матриц восстановите структуру лабиринта и определите к какой из ситуаций (изначальная, пункт 1 и пункт 3) каждая из них относится. Нарисуйте этот лабиринт.

Марковскими одношаговыми процессами называются процессы, в которых случайная величина может за шаг увеличиваться или уменьшаться только на единицу. Эти переходы описываются соответствующими коэффициентами: g_n — вероятность перехода вперед за единицу времени из n в $n+1$ (скачек вправо), r_n — вероятность перехода назад за единицу времени из n в $n-1$ (скачек влево).

Основное кинетическое уравнение тогда выглядит так

$$\dot{p}_n = r_{n+1}p_{n+1} + g_{n-1}p_{n-1} - (r_n + g_n)p_n.$$

Первые два слагаемых описывают все способы прийти в n -е состояние и, тем самым, увеличить вероятность обнаружить там частицу p_n . Первое слагаемое, например, описывает ситуацию, когда система была в соседнем справа $n+1$ -м состоянии с соответствующей вероятностью и совершила скачек влево. Третье слагаемое описывает механизмы уменьшения вероятности n -го состояния, то есть выхода из него в предыдущее или последующее.

Рассмотрим несколько примеров применения этой модели

0.1

Нам уже хорошо известен пуассоновский процесс. В нем марковская дискретная величина: число пришедших импульсов. Она увеличивается на единицу при каждом пришедшем импульсе. Импульсный пуассоновский процесс с вероятностью появления импульса в единицу времени γ можно характеризовать количеством появившихся импульсов n

$$0 \leq n \leq \infty, \quad g_n = \gamma, \quad r_n = 0, \quad \langle n \rangle = \gamma t.$$

0.2

Частица блуждает по одномерной бесконечной дискретной решетке, с номерами ячеек n и постоянными вероятностями прыжков влево α и вправо β

$$-\infty \leq n \leq \infty, \quad g_n = \beta, \quad r_n = \alpha, \quad \langle n \rangle = (\beta - \alpha)t, \\ \sigma_n^2 = (\alpha + \beta)t.$$

0.3

Для симметричной двухуровневой системы

$$0 \leq n \leq 1, \quad g_n = \nu(1 - n), \quad r_n = \nu n.$$

0.4

$$\langle n \rangle = \frac{1}{2} + \left(n_0 - \frac{1}{2} \right) e^{-2\nu t}.$$

Спонтанный распад атомов характеризуется скоростью распада γ . В начальный момент было N_0 атомов. Изменение со временем среднего количества нераспавшихся атомов n

$$0 \leq n \leq N_0, \quad g_n = 0, \quad r_n = n\gamma, \quad \langle n \rangle = n_0 e^{-\gamma t}.$$

0.5

В простейшей модели динамики популяций предполагается, что рождение новой особи пропорционально числу живущих на данный момент особей n и умирание одной особи тоже пропорционально n

$$0 \leq n \leq \infty, \quad g_n = n\beta, \quad r_n = n\alpha, \quad \langle n \rangle = n_0 e^{-(\alpha+\beta)t}.$$

задания на выбор

1. Матрицы лабиринтов с жуками (в начале лекции)
2. задача:

Для применения модели дискретных марковских процессов в общем случае важно знать время корреляции реального процесса и выбирать в качестве временного шага время большее времени корреляции. Для следующих дискретных случайных величин (1 — 5) подберите подходящий масштаб времен корреляции и, соответственно, шагов в модели марковского процесса: миллисекунды, секунды, сутки, года, столетия.

1. Число зарегистрированных комет
2. Число особей в популяции крупных млекопитающих
3. Число импульсов принятых нейроном
4. Номер игрока, владеющего шайбой, во время хоккейного матча
5. Число инфицированных во время эпидемии.

3. тема для эссе:

Найдите примеры изменяющихся дискретных величин в истории и литературе (например, число крупных городов, входивших в состав Византийской империи; число сопровождающих Фродо). При каком условии изменение этого числа можно считать марковским?

Если кто-то хочет получить освоить дискретные процессы, высылаю задачник, там часть 3 содержит много задач.