

Вопросы к зачету по курсу "Флуктуации в природе и культуре "

Каждый билет соответствует одной лекции. По каждой лекции даются варианты заданий на выбор студента. Можно решить задачу или написать эссе по изучаемому вопросу, а иногда будет так же дано графическое задание. Студентам ведаются необходимые для выполнения заданий тексты, изображения, а также бумага и заготовки для графических заданий. Наиболее интересные работы студентов обсуждаются на следующей лекции и могут быть использованы при чтении курса в следующие годы.

1.

задача

Рассмотрим модель двумерного движения N молекул идеального газа в сосуде длиной a и шириной b , при температуре T . Молекулы представлены шариками радиуса r_0 , сталкивающимися друг с другом и со стенками по закону упругого удара. Шарiki могут влетать в выделенный объем $V \ll ab$, через отверстие в перегородке длиной c . Найдите средние значения следующих флуктуирующих величин

- 1 Угол φ между направлением вектора скорости шарика и осью OX
- 2 Угол ψ падения шарика на стенку
- 3 Проекция v_x скорости шарика на ось OX
- 4 Координата шарика x
- 5 Величина равная 1, если последнее столкновение шарика со стенкой было именно с левой стенкой (длиной a), и равная 0, если с другой стенкой
- 6 Число шариков M_V , оказавшихся в данный момент в выделенном малом объеме V

тема для эссе

Прокомментируйте отрывок из Божественной комедии Данте Алигьери. Какие флуктуирующие величины тут упомянуты? Какие строки можно считать поэтическим определением флуктуаций

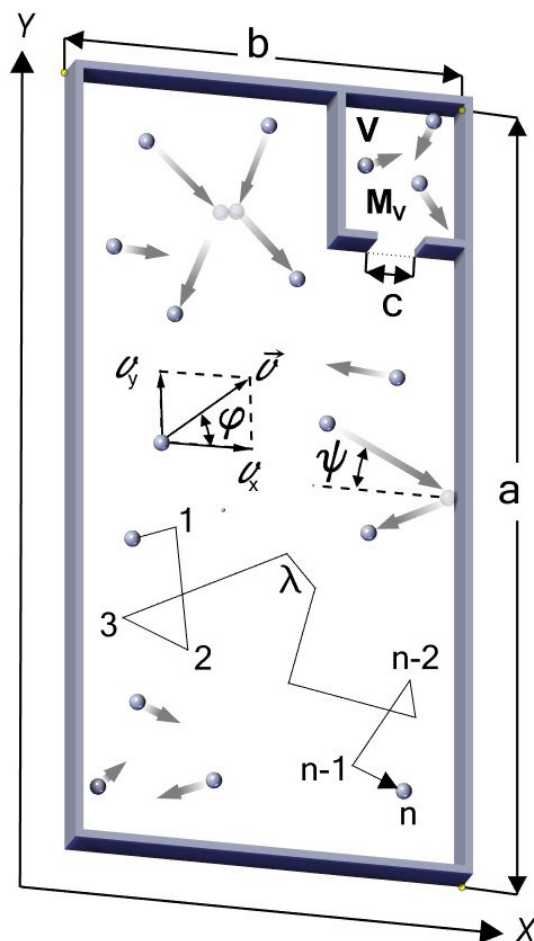


Рис. 1: Модель двумерного идеального газа

64

Я под случайным мыслю всякий вид
Созданий, все, что небосвод кружащий
Чрез семя и без семени плодит.

67

Их воск изменчив, наравне с творящей
Его средой, и потому чекан
Дает то смутный оттиск, то блестящий.

70

Вот почему, при схожести семян,
Бывает качество плодов неравно,
И разный ум вам от рожденья дан.

73

Когда бы воск был вытоплен исправно
И натиск силы неба был прямой,
То блеск печати выступал бы явно.

76

Но естество его туманит мглой,
Как если б мастер проявлял уменье,
Но действовал дрожащею рукой.

графическое задание

Изобразите три траектории молекулы идеального газа с большой, малой и средней дисперсиями длин пробегов.

2.

задача

Найдите математическое ожидание и дисперсию для случайной величины, распределенной по нормальному закону

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma^2}\right)$$

тема для эссе

Опишите процесс в доске Гальтона с точки зрения шарика, движущегося в ней.

тема для эссе

Приведите примеры из литературы, когда большие отклонения от среднего значения какой-либо характеристики персонажа играли существенную роль в развитии событий (Дюймовочка (рост), Шерлок Холмс (ум), Обломов (лень))

тема для эссе

Назовите авторов или художников, чей авторский стиль можно узнать по тому признаку, что какая-то величина принимает значения, далеко отстоящие от среднестатистических.

(Например, в работах художников-примитивистов у всех людей большие головы)

графическое задание

Набор кружков на двух половинах листа подчиняется двум различным распределениям. Размеры одних кружков описываются экспоненциальным распределением, а вторых — гамма-распределением. Определите, какая половина соответствует снежинкам, а какая дождевым каплям, дорисуйте их и добавьте соответствующий фон.

3.

задача

Найдите математическое ожидание и дисперсию для случайной величины, распределенной по закону Пуассона

$$P_k = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}, \quad k \geq 0$$

тема для эссе

Приведите свои примеры дискретных величин, распределенных по закону Пуассона.

графическое задание

Изобразите предмет, в основе дизайна которого лежит пуассоновская последовательность каких-либо элементов.

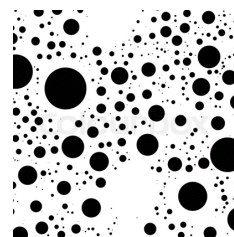


Рис. 2: Пуассоновское 2D распределение кружков

4.

задача

Запишите управляющее уравнение для процесса распада атома с периодом полураспада λ и сравните с уравнением для процесса Пуассона.

задача

Рассмотрите асимметричное одномерное случайное блуждание на дискретной решетке, описывающее диффузию в присутствии внешней силы. Вероятность скачка направо $p > 1/2$. Найдите первый и второй моменты.

задача

Для применения модели дискретных марковских процессов в общем случае важно знать время корреляции реального процесса и выбирать в качестве временного шага время большее времени корреляции. Для следующих дискретных случайных величин (1 — 5) подберите подходящий масштаб времен корреляции и, соответственно, шагов в модели марковского процесса: миллисекунды, секунды, сутки, года, столетия.

1. Число зарегистрированных комет
2. Число особей в популяции крупных млекопитающих
3. Число импульсов, принятых нейроном
4. Номер игрока, владеющего шайбой, во время хоккейного матча
5. Число инфицированных во время эпидемии.

тема для эссе

Найдите примеры изменяющихся дискретных величин в истории и литературе (например, число крупных городов, входивших в состав Византийской империи; число сопровождающих Фродо). При каком условии изменение этого числа можно считать марковским?

5.

задача

В сосуде с молекулами идеального газа есть воображаемая перегородка перпендикулярная оси ОХ. Импульсный процесс описывает моменты пересечения молекулами этой перегородки в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси ОХ. Постройте приблизительный график импульсного процесса, соответствующий следующим ситуациям:

- 1 Пересечение единственной частицей в сосуде воображаемой перегородки
- 2 Пересечение одной, выделенной из многих, частицей в газе воображаемой перегородки
- 3 Пересечение любой частицей в газе воображаемой перегородки.

задача

Броуновская частица совершает переходы между двумя потенциальными ямами под действием тепловых шумов. При этом она большую часть времени находится в той или другой потенциальной яме, причем, чем глубже яма, тем дольше среднее время пребывания в ней частицы. ИП описывает переходы через потенциальный барьер в ту или иную сторону. Постройте график импульсного процесса. Рассмотрите так же случай двух ям одинаковой глубины.

тема для эссе

Проанализируйте влияние на историю какого-нибудь народа или города внешних импульсных процессов (например, засухи, нашествия саранчи, набег кочевников). Оцените примерно статистические характеристики этих процессов.

графическое задание

На основе графиков процессов с положительной и отрицательной периодичностью придумайте дизайн какого-то предмета. Какой тип процесса больше подходит для создания артефактов?

6.

задача

Рассмотрим процесс регистрации космических частиц счетчиком с рефрактерным временем. Регистрация каждой частицы моделируется δ -импульсом в соответствующий момент времени с постоянной амплитудой f_0 . Он представляет собой важный пример процесса с регулируемой периодичностью: импульсный пуассоновский процесс $\eta(t)$ с рефрактерным временем ϑ_0 . Докажите, что $T = \vartheta_0 + 1/p$. А именно, если среднее время между двумя последовательными регистрациями частиц T будет фиксированным, то, чем больше рефрактерное время ϑ_0 , тем больше вероятность p появления следующего импульса, как только это время задержки закончится. В пределе $\vartheta_0 \rightarrow T$ получается периодический процесс. Таким образом можно регулировать периодичность процесса, меняя ϑ_0 .

тема для эссе

Приведите примеры стихотворений с простым периодическим ритмом; наоборот, верлибр, где почти никакой периодичности нет. И наиболее удачное, на Ваш взгляд, стихотворение с точки зрения периодичности ритма.

тема для эссе

Рассмотрите, как удается избежать унылой периодичности в дизайне знаменитых лестниц и оград.

графическое задание

Изобразите несколько однотипных орнаментов с разной степенью периодичности. Какой из них Вы считаете наиболее красивым?

7.

задача

Частица делает скачки длиной в 1 сантиметр. После каждого скачка она меняет направление движения случайным образом. Найдите с помощью вычислений или экспериментально, на какое в среднем расстояние она удалится от точки начала движения за 25 шагов, за 36 шагов, за 49 шагов.

тема для эссе

Сравните блуждания различных литературных героев (например, сумрачный лес у Данте, Хэмптон-Кортский лабиринт у Джерома).

графическое задание

Изобразите на основе случайной траектории некоторый узнаваемый предмет или существо.

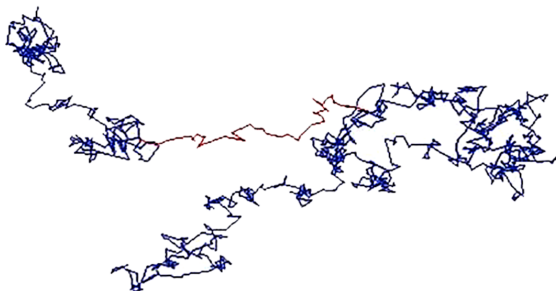


Рис. 3: Траектория случайного блуждания

Найдите информацию, заключенную в 4-х ответах на вопросы, предполагающие ответы "Да" и "Нет". Причем, во всех вопросах вероятность ответа "Да" вдвое больше вероятности ответа "Нет".

тема для эссе

Дайте определение температуры и энтропии с точки зрения различных персонажей и исторических личностей.

графическое задание

Изобразите какой-нибудь природный объект (например, цветок, дерево или пейзаж), состоящий из нескольких частей. Затем изобразите эти части предмета (а) уложенными в идеальном порядке, (б) разбросанными по листу в состоянии максимального хаоса. Получилось смешно или жутковато?

9.

задача

Для преобразования пекаря найдите показатель Ляпунова.

$$x_{n+1} = 2x_n, \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n \quad \text{при} \quad 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}$$

$$x_{n+1} = 2x_n - 1, \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1$$

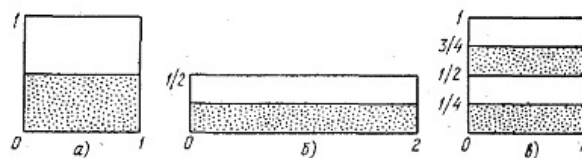


Рис. 4: Отображение пекаря

тема для эссе

Приведите примеры мелочей, определивших развитие приключенческого сюжета или хода истории.

графическое задание

Изобразите природные объекты, в основе которых ветвящиеся структуры.

8.

задача

10.

задача



Рис. 5: Деревянный манекен для рисования

В рассеивающем математическом бильярде площадью Ω движется частица. Докажите, что если скорость постоянна, то распределение в фазовом пространстве имеет вид

$$(\Omega 2\pi)^{-1}$$

тема для эссе

Напишите диалог двух шариков в бильярде с рассеивающей границей, стартующих с близкими начальными условиями.

графическое задание

Изобразите предмет, в основе дизайна которого лежит траектория частицы в бильярде.

11.

задача

Рассмотрим флуктуации поршня массой m и площадью S в вертикальном цилиндрическом сосуде. Над поршнем вакуум, а под ним одноатомный идеальный газ из N частиц, поддерживаемый при температуре T . Вверх поршень подталкивают удары частиц газа, как гигантскую одномерную броуновскую частицу, а вниз на него действует сила тяжести. Вдоль вертикальной оси OX поршень совершает случайные колебания около положения равновесия. СДУ для такого поршня можно записать в соответствии со вторым законом Ньютона

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - mg + pS + \xi(t).$$

Случайные силы $\xi(t)$ характеризуются равновесным значением $D_\xi = kT\gamma$. Рассмотрим флуктуации поршня на временах больших времени релаксации, то есть передемпфированную систему, тогда слагаемым со вто-

рой производной можно пренебречь. Подставляем выражение для давления из уравнения Менделеева-Клапейрона $p = NkT/(Sx)$ и получаем СДУ в стандартной форме

$$\dot{x} + \frac{mg}{\gamma} - \frac{NkT}{\gamma x} = \frac{1}{\gamma}\xi(t).$$

Докажите, что стационарное распределение флуктуаций поршня является гамма-распределением и имеет вид

$$w_{st}(x) = Cx^N \exp\left(-\frac{mgx}{kT}\right).$$

тема для эссе

Покажите соотношение сил порядка (культурный герой) и хаоса (трикстер) в мифах. (Например, Аполлон и Дионис; Тор и Локи)

12.

задача

Запишите СДУ для бистабильной системы под воздействием гармонического возмущения. А именно, для броуновской частицы, находящейся в поле с потенциальной энергией

$$V = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4.$$

тема для эссе

Расположите известные Вам архитектурные стили в порядке возрастания разброса основных размеров и пропорций и, соответственно, уменьшения строгости канонов.

тема для эссе

Разберите следующие пары зарифмованных слов на три группы, соответствующие трем поэтам: Симеону Полоцкому — поэту XVII в., Николаю Гумилеву — поэту Серебряного века Русской поэзии, и Ренате Мухе, писавшей смешные стихи для современных детей. Основной подсказкой будет степень случайности, спонтанности этих рифм, которая нарастала со временем.

1. Этаже — уже 2. Упрямый — дамы 3. Жити — быти 4. Белою — делаю 5. Арктической — практически 6. Родителю — благодетелю 7.

Бежит она — неожиданно 8. Кровавой — право 9. Старости — юности 10. Гонимый — держимый 11. Тонкий — гипопотомки 12. Соблазна — крестообразно 13. Насмерть — насморк 14. Пленный — замкнутый 15. Вдохнуть — грудь.

графическое задание

Изобразите один и тот же портрет или предмет несколько раз: с большим количеством мелких случайных деталей и отклонений от симметрии, совсем без них, и промежуточные состояния. Какое изображение Вам больше нравится?

13.

задача

Из двух формул одна описывает стопку экзаменационных билетов, а вторая игральную кость

$$S = k \ln 6, \quad \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{f(t_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{f(t)}{f(t_0)} = \ln 2.$$

Определите, какая что описывает, и что это за величины.

задача

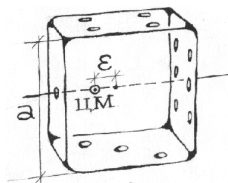


Рис. 6: Кубик со смещенным центром масс

тема для эссе

Предложите новый способ генерации случайных чисел и докажите его преимущества перед существующими.

тема для эссе

Опишите, каким, на Ваш взгляд, было влияние азартных игр на дворянское общество в XIX веке?

14.

задача

Активные броуновские частицы движутся с постоянными скоростями и ударяются в стенки сосуда. Докажите, что распределение углов падения частиц будет

$$w(x) = \frac{1}{2} \cos(\varphi).$$

тема для эссе

Возьмите короткий, хорошо известный текст (например, "Наша Таня громко плачет...") и добавьте в него много случайных деталей. Что произошло с текстом?

тема для эссе

Поразмышляйте над соотношением понятий "оригинальность" и "случайность" на примерах работ современных архитекторов и дизайнеров (Фриденсрайх Хундертвассер, Ренцо Пиано, Антуан Прекок)

графическое задание

Рассмотрите превращение геометрических фигур в животных в работах Эшера. Предположив, что реалистичное изображение соответствует оптимальному количеству случайных деталей, попробуйте продолжить этот ряд, изобразив этих же животных с чрезмерно большим количеством случайных отклонений, так, чтобы они в результате совсем затерялись в хаосе случайных линий.

Терминология курса

Вопросы кроссворда не являются строгими определениями соответствующих понятий, могут встречаться также аббревиатуры. Если в качестве вопроса приводится формула, то нужно угадать величину, которую она определяет, или название закона, или его автора.

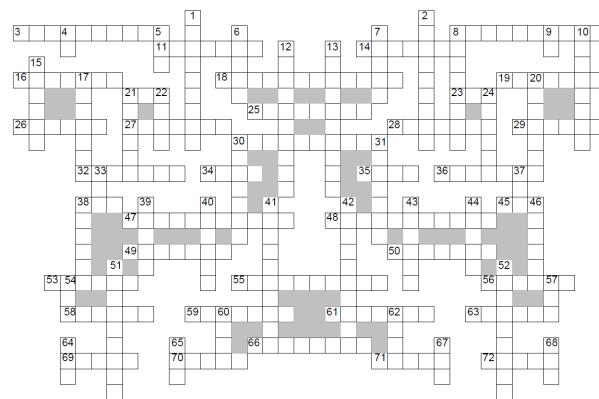


Рис. 7: кроссворд

ПО ГОРИЗОНТАЛИ

3 Явление $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle - \langle \xi(t) \rangle^2$

8

$$\int w(x) dx = 1$$

11 Устойчивое состояние — это ... свободной энергии $F = U - ST$

14 Вероятность того, что угол падения частицы на стенку соответствует неравенствам $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$

16 Общее название домашних животных, взмахи хвостом которых могут быть описаны как квазипериодический импульсный процесс

18

$$w(\xi_3|\xi_1) = \int w(\xi_3|\xi_2)w(\xi_2|\xi_1) d\xi_2$$

19 В математическом бильярде функция, задающая распределение вероятностей углов, под которыми происходят соударения хаотически движущихся частиц со стенкой произвольной формы

21 Состояние сурка в интервалах между квазипериодически следующими импульсами, регистрируемыми приблизительно каждые две недели в течении зимы

23 Приближенное время корреляции важных исторических событий

25 Математическая операция, позволяющая находить среднее значение непрерывной случайной величины

26 Часть прибора, предназначенная для уменьшения влияния внешних электромагнитных флуктуаций

27 Автор модельной демонстрации биномиального и гауссова распределений, а так же дискретного марковского одношагового процесса с $g_n = r_n = 1/2$

28

$$P(n) = \frac{e^{-\alpha} \alpha^n}{n!}$$

29 Творожное изделие с пуассоновским распределением изюма в нем. Оно послужило моделью атома, предполагавшей некоррелированное распределение электронов в пространстве

30 Неравновесный процесс перехода к равновесному, как правило, более хаотическому состоянию

32 Область марковской матрицы, где расположены все вероятности переходов из данного состояния в другие и так же отсутствия перехода

34 Термодинамическая ... — термодинамически равновесное состояние вещества, качественно отличное по своим свойствам от других равновесных состояний того же вещества. Она бывает жидкая, газообразная, твердая, намагниченная

35 Оно описывает силовое воздействие, приводящее чаще всего к большей упорядоченности системы. А именно, для каждой точки пространства задана сила

36 Набор всех кинетических коэффициентов (в том числе и нулевых) дискретного марковского процесса

38 $\xi(t)$, если $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = 2D\delta(\tau)$, то есть время корреляции очень мало

45 Название (имя автора) стохастического интеграла

$$\begin{aligned} \int b(x(t'), t') \xi(t') dt' &= \int b(x(t'), t') dW(t') = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} b(x(t_j), t_j) [W(t_{j+1}) - W(t_j)] \end{aligned}$$

47

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b w(x) dx$$

48 Название (имя автора) стохастического интеграла

$$\begin{aligned} \int b(x(t'), t') \xi(t') dt' &= \int b(x(t'), t') dW(t') = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{N-1} b\left(\frac{x(t_{j+1}) + x(t_j)}{2}, t_j\right) [W(t_{j+1}) - W(t_j)] \end{aligned}$$

49 Изменение состояния в дискретном марковском процессе

50 Область в матрице вероятностей марковских переходов, сумма элементов которой всегда равна единице

53 Что происходит с графиком плотности распределения вероятностей при уменьшении дисперсии

55 Элементарная функция, задающая распределение вероятностей для интервалов между импульсами некоррелированного Пуассоновского процесса

56 Автор идей процесса, когда следующее состояние зависит только от предыдущего и не зависит от предыстории: $w(x_m|x_{m-1}, x_{m-2}, \dots) = w(x_m|x_{m-1})$

58 Процесс, при котором число сохранившихся атомов уменьшается и уравнение для вероятности $\dot{p}_n(t) = \gamma(n+1)p_{n+1} - \gamma np_n$

59 Общее название $w(x_m|x_{m-1})$, $p_n(t)$, $\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle$, $\delta(\tau)$, ...

61 То, что ограничивает применение теории марковских процессов к описанию движения броуновской частицы. А именно, она какое-то время летит в одном и том же направлении, и ее траектория будет более гладкой, чем траектории окружающих молекул

63

$$\langle x^n \rangle = \int x^n w(x) dx,$$

например, для гамма-распределения $n\alpha$, $n(n+1)\alpha^2$, $n(n+1)(n+2)\alpha^3$

66 Автор уравнения для скорости броуновской частицы $\dot{x}(t) + a(x) = b(x)\xi(t)$

69 Часть распределения вероятностей, соответствующая большим значениям случайной величины: $x \gg \langle x \rangle$

70 То, что получается в результате увеличения энтропии некоторого количества различных веществ. Применяется для лечения или наоборот

71

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

72 Обозначение

$$\sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$$

ПО ВЕРТИКАЛИ

- 1 Чем является матожидание, дисперсия или интенсивность стационарного случайного процесса, если он стационарный
- 2 Плавная линия на графике флуктуаций, сглаживающая их
- 4 Обозначение величины $Nm_0w(x, y, z)$, где m_0 — масса одной молекулы, N — число молекул в сосуде, $w(x, y, z)$ — плотность распределения вероятности для одной молекулы
- 5 Область в пространственном распределении потенциальной энергии, соответствующая в равновесном состоянии максимальной вероятности обнаружить частицу
- 6 Математическая операция. При случайном блуждании смещение — это ... всех скачков частиц
- 7 Распространенное преобразование индекса суммирования для вычисления моментов дискретных случайных величин
- 8 Автор формулы, которую можно использовать для создания генератора случайных чисел на основе тепловых флуктуаций. Она также называется Флуктуационно-диссипационной теоремой
- 9 Единица измерения величины, отвечающей за диссипацию, а значит и флуктуации, в электрическом контуре. Явление, описываемое этой величиной связано с превращением упорядоченного движения электронов в хаотическое тепловое движение
- 10 Статистическая характеристика. Интерес к ней обусловлен тем, что для суммы независимых случайных величин она равна сумме соответствующих характеристик для каждой величины, например, $\langle x \rangle, \sigma^2$ — это первый и второй ...
- 12 $x - \langle x \rangle$
- 13 $\langle (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) \rangle$
- 15 Минимальное изменение состояния в задаче о дискретных случайных блужданиях
- 17 Основной элемент стационарного случайного процесса, который может обладать пуассоновской, суб-пуассоновской или супер-пуассоновской статистикой
- 20 Единица измерения величины определяемой формулой Крамерса для данной интенсивности шума, совпадение этой величины с периодом гармонического сигнала приводит к стохастическому резонансу
- 21 При стохастическом резонансе то, интенсивность чего удастся усилить, подобрав соответствующую интенсивность шума
- 22 Ускорение частицы в задаче Улама при гармоническом движении стенки
- 24 Электрическая система, описываемая уравнением Ланжевена аналогично броуновской частице, например, $\dot{q} = -q/(LC) + \xi(t)$, роль шума здесь играют тепловые флуктуации в резисторе
- 30 Разговорное название дисперсии
- 31 Средство перехода от распределения вероятностей для некоторых величин к распределению для функций от этих величин

$$\left| \frac{\partial(a, b)}{\partial(\rho, \varphi)} \right|$$

Обозначение времени корреляции

- 37 Обоснование того, что распределение вероятностей для суммы большого числа независимых случайных величин является гауссовским
- 38 Характеристика графика плотности распределения вероятности, демонстрирующая степень случайности величины
- 39 Имя автора распределения для расстояния от центра в двумерной области

$$w(\rho) = \frac{\rho}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}\right)$$

(в записи через "e")

- 40 Область марковской матрицы, где расположены все вероятности переходов в данное состояние из других и так же отсутствия перехода
- 41 Это есть наука о том, как, не умея мыслить и понимать, заставить делать это цифры (историк В. О. Ключевский)
- 42 Флуктуация — это ... (Δx) от среднего значения величины
- 43 Автор формулы, описывающей шум дискретизации или дробовой шум

$$S^+(\omega) = \frac{e}{\pi} I_0$$

44

$$W(t) = \int_0^t \xi(t') dt'$$

если $\langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = 2D\delta(\tau)$

- 46 Реакция системы на внешнее воздействие. Может описываться стохастическим дифференциальным уравнением
- 51 Характеристика интервалов между импульсами, отношение которой к математическому ожиданию определяет тип импульсного процесса суб-, супер-, пуассоновскую (второй кумулянт)
- 52 Периодическое колебание, являющееся частью сложного процесса
- 54 Состояние организма, когда интенсивность тепловых флуктуаций заметно повышается
- 57 В простейшей модели движения броуновской частицы модуль скорости не меняется. С чем тогда связана случайная природа движения?
- 60 Вероятность $P_{j,j-1}$ для процесса распада ядер
- 62 Случайная величина, отклонение которой от гауссовского распределения объясняется экономическими, культурными и политическими причинами
- 64 Орган сверчка, в котором используется стохастический резонанс
- 65 Поэтическое название приспособления, уменьшающего число степеней свободы
- 67 Область внутри вращающейся центрифуги, где функция распределения вероятностей обнаружить частицу имеет минимум
- 68 Термодинамическая система, в которой флуктуации числа частиц в объеме можно считать марковским процессом