Категориальные грамматики

Лекция 7 (30.03.2016)

Грамматики Ламбека и контекстно-свободные грамматики

Степан Кузнецов, Мати Пентус, Алексей Сорокин

МГУ им. М. В. Ломоносова, межфакультетский курс,
весенний семестр 2015/2016 учебного года

Теорема

Если формальный язык можно задать грамматикой Ламбека, то его также можно задать контекстно-свободной грамматикой.

Аксиомы и правила исчисления Ламбека.

$$A \to A$$

$$\frac{\Phi \to B \qquad \Gamma, B, \Delta \to A}{\Gamma, \Phi, \Delta \to A}\ (\mathrm{cut})$$

$$\frac{A, \Pi \to B}{\Pi \to (A \backslash B)}\ (\to\backslash)\ \text{(если } \Pi \text{ непуста)}$$

$$\frac{\Phi \to A \qquad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, \Phi, (A\backslash B), \Delta \to C}\ (\backslash\to)$$

$$\frac{\Pi, A \to B}{\Pi \to (B/A)}\ (\to/)\ \text{(если } \Pi \text{ непуста)}$$

$$\frac{\Phi \to A \qquad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, (B/A), \Phi, \Delta \to C}\ (/\to)$$

$$\frac{\Gamma \to A \qquad \Delta \to B}{\Gamma, \Delta \to (A \cdot B)}\ (\to\cdot)$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, (A \cdot B), \Delta \to C}\ (\cdot\to)$$

Определение

Секвенция называется *тонкой*, если каждый встречающийся в ней примтитивный тип встречается там ровно два раза.

Теорема

Если секвенция выводима, то она получается из некоторой тонкой выводимой секвенции путём переименования примитивных типов.

Пример

Секвенцию

$$(np/n), (n/n), (n/n), n, (np\backslash s) \to s$$

можно получить из тонкой секвенции

$$(np/n), (n/r), (r/q), q, (np\backslash s) \to s.$$

$$\dfrac{n \to n \qquad \dfrac{n \to n \qquad \dfrac{n \to n \qquad \dfrac{np \to np \qquad s \to s}{np, (np\backslash s) \to s}\,(\backslash\to)}{(np/n), n, (np\backslash s) \to s}\,(/\to)}{(np/n), (n/n), n, (np\backslash s) \to s}\,(/\to)}{(np/n), (n/n), (n/n), n, (np\backslash s) \to s}\,(/\to)$$

$$\dfrac{q \to q \qquad \dfrac{r \to r \qquad \dfrac{n \to n \qquad \dfrac{np \to np \qquad s \to s}{np, (np\backslash s) \to s}\,(\backslash\to)}{(np/n), n, (np\backslash s) \to s}\,(/\to)}{(np/n), (n/r), r, (np\backslash s) \to s}\,(/\to)}{(np/n), (n/r), (r/q), q, (np\backslash s) \to s}\,(/\to)$$

Пример

John visits him or gives Mary a book.

$$
\begin{array}{rl}
\text{visits him} & ((np\backslash s)/np), ((s/np)\backslash s) \\
\text{gives Mary a book} & (((np\backslash s)/np)/np), np, (np/n), n
\end{array}
$$

Существует ли такой тип C, что
$\mathrm{L} \vdash ((np\backslash s)/np), ((s/np)\backslash s) \to C$ и
$\mathrm{L} \vdash (((np\backslash s)/np)/np), np, (np/n), n \to C$?

Определение

Умножение в свободной группе.

$$(up_i)\cdot(p_i^{-1}v) = u\cdot v,$$
$$(up_i^{-1})\cdot(p_i v) = u\cdot v,$$
$$\text{в остальных случаях } x\cdot y = xy.$$

Пример

$(sn^{-1}n^{-1})\cdot(ns^{-1}) = sn^{-1}s^{-1}.$

Определение

Нахождение обратного элемента в свободной группе.

$$(\varepsilon)^{-\mathbf{1}} = \varepsilon,$$
$$(up_i)^{-\mathbf{1}} = p_i^{-1}(u)^{-\mathbf{1}},$$
$$(up_i^{-1})^{-\mathbf{1}} = p_i(u)^{-\mathbf{1}}.$$

Определение

Интерпретация типов исчисления Ламбека в свободной группе.

$$\begin{aligned} [\![p_i]\!] &= p_i, \\ [\![A \bullet B]\!] &= [\![A]\!] \cdot [\![B]\!], \\ [\![A \backslash B]\!] &= [\![A]\!]^{-\mathbf{1}} \cdot [\![B]\!], \\ [\![B / A]\!] &= [\![B]\!] \cdot [\![A]\!]^{-\mathbf{1}}. \end{aligned}$$

Пример

$[\![(s/np)]\!] = s(np)^{-1}$. $\qquad [\![((s/np)\backslash s)]\!] = (s(np)^{-1})^{-\mathbf{1}} \cdot s = np$.

Лемма

Пусть $\mathrm{L} \vdash A_1, \ldots, A_n \to B$. *Тогда* $[\![A_1]\!] \cdot \ldots \cdot [\![A_n]\!] = [\![B]\!]$.

Пример

$\mathrm{L} \vdash ((np\backslash s)/np) \to (np\backslash(s/np))$.
$[\![((np\backslash s)/np)]\!] = (np)^{-1}s(np)^{-1}$ и $[\![(np\backslash(s/np))]\!] = (np)^{-1}s(np)^{-1}$.

Теорема

Следующие условия равносильны:

- $\mathrm{L} \vdash A \to C$ *и* $\mathrm{L} \vdash B \to C$ *для некоторого типа* C,
- $\mathrm{L} \vdash D \to A$ *и* $\mathrm{L} \vdash D \to B$ *для некоторого типа* D,
- $[\![A]\!] = [\![B]\!]$.

Пример

John (visits him) or (gives Mary a book).
$[\![((np\backslash s)/np)]\!] \cdot [\![((s/np)\backslash s)]\!] = (np)^{-1}s.$
$[\![(((np\backslash s)/np)/np)]\!] \cdot [\![np]\!] \cdot [\![(np/n)]\!] \cdot [\![n]\!] = (np)^{-1}s.$

Теорема

Пусть $\mathrm{L} \vdash A \to C$. *Тогда существует такой тип* I, *что*

(i) $\mathrm{L} \vdash A \to I$;

(ii) $\mathrm{L} \vdash I \to C$;

(iii) $\mathbf{Var}(I) \subseteq \mathbf{Var}(A) \cap \mathbf{Var}(C)$.

(Тип I *называется интерполянтом секвенции* $A \to C$*.)*

Пример

Интерполянтом для секвенции $((np/n) \cdot n) \to ((s/np)\backslash s)$ является np.
Действительно, $\mathrm{L} \vdash ((np/n) \cdot n) \to np$ и $\mathrm{L} \vdash np \to ((s/np)\backslash s)$.

Определение

Секвенция называется *тонкой*, если каждый встречающийся в ней примтитивный тип встречается там ровно два раза.

Теорема

Пусть $\mathrm{L} \vdash \Phi, \Theta, \Psi \to C$, *где* $\Phi, \Theta, \Psi \to C$ *является тонкой и* Θ *не является пустой. Тогда существует такой тип* I, *что*

(i) $\mathrm{L} \vdash \Theta \to I$;

(ii) $\mathrm{L} \vdash \Phi, I, \Psi \to C$;

(iii) *секвенция* $\Theta \to I$ *является тонкой;*

(iv) *секвенция* $\Phi, I, \Psi \to C$ *является тонкой;*

(v) $\|I\| = |[\![\Theta]\!]|$.

Теорема

Если формальный язык можно задать грамматикой Ламбека, то его также можно задать контекстно-свободной грамматикой.

Пример

$np_{\mathrm{PL}}/n_{\mathrm{PL}}$	the
n_{PL}	guests, actors, binoculars
$n_{\mathrm{PL}}/n_{\mathrm{PL}}$	guest, actor, binocular
$np_{\mathrm{PL}}\backslash s$	smile
$(np_{\mathrm{PL}}\backslash s)/np_{\mathrm{PL}}$	see
$(n_{\mathrm{PL}}\backslash n_{\mathrm{PL}})/np_{\mathrm{PL}}$	with
$((np_{\mathrm{PL}}\backslash s)\backslash(np_{\mathrm{PL}}\backslash s))/np_{\mathrm{PL}}$	with

Какие выводимые секвенции позволяют установить корректность следующих предложений?

The guest actors smile.

The actors with the binoculars smile.

The guests see the actors with the binoculars.