

# Категориальные грамматики

## Теория формальных языков.

Степан Кузнецов, Мати Пентус, Алексей Сорокин

МГУ им. М. В. Ломоносова, межфакультетский курс,  
весенний семестр 2015–2016 учебного года

# Расширение контекстно-свободных грамматик

- Стандартная контекстно-свободная грамматика  $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ .

## Расширение контекстно-свободных грамматик

- Стандартная контекстно-свободная грамматика  $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ .
- Каждому правилу вида  $A \rightarrow u_0 B_1 \dots B_r u_r$  грамматики  $G$  можно сопоставить логическое правило

$$\frac{B_1 \vdash v_1 \dots B_r \vdash v_r}{A \vdash u_0 v_1 \dots v_r u_r}$$

## Расширение контекстно-свободных грамматик

- Стандартная контекстно-свободная грамматика  $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ .
- Каждому правилу вида  $A \rightarrow u_0 B_1 \dots B_r u_r$  грамматики  $G$  можно сопоставить логическое правило

$$\frac{B_1 \vdash v_1 \dots B_r \vdash v_r}{A \vdash u_0 v_1 \dots v_r u_r}$$

- Контекстно-свободная грамматика с семантикой Монтегю:  $G_\lambda = \langle N, \Sigma, P, S, \nu, \tau \rangle$ , где
  - $\tau: N \rightarrow T$  — отображение из множества терминалов в множество семантических типов.

## Расширение контекстно-свободных грамматик

- Стандартная контекстно-свободная грамматика  $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ .
- Каждому правилу вида  $A \rightarrow u_0 B_1 \dots B_r u_r$  грамматики  $G$  можно сопоставить логическое правило

$$\frac{B_1 \vdash v_1 \dots B_r \vdash v_r}{A \vdash u_0 v_1 \dots v_r u_r}$$

- Контекстно-свободная грамматика с семантикой Монтегю:  $G_\lambda = \langle N, \Sigma, P, S, \nu, \tau \rangle$ , где
  - $\tau: N \rightarrow T$  — отображение из множества терминалов в множество семантических типов.
  - $\nu: P \rightarrow Tm$  — отображение из множества правил в множество  $\lambda$ -термов.

## Расширение контекстно-свободных грамматик

- Стандартная контекстно-свободная грамматика  $G = \langle N, \Sigma, P, S \rangle$ .
- Каждому правилу вида  $A \rightarrow u_0 B_1 \dots B_r u_r$  грамматики  $G$  можно сопоставить логическое правило

$$\frac{B_1 \vdash v_1 \dots B_r \vdash v_r}{A \vdash u_0 v_1 \dots v_r u_r}$$

- Контекстно-свободная грамматика с семантикой Монтегю:  $G_\lambda = \langle N, \Sigma, P, S, \nu, \tau \rangle$ , где
  - $\tau: N \rightarrow T$  — отображение из множества терминалов в множество семантических типов.
  - $\nu: P \rightarrow Tm$  — отображение из множества правил в множество  $\lambda$ -термов.

При этом если  $\pi: A \rightarrow w_0 B_1 \dots B_r w_r$  — правило грамматики, то  $\nu(\pi)$  имеет тип  $\tau(A)$ , причём свободные переменные  $\nu(\pi)$  находятся среди множества  $x_1, \dots, x_r$ .

## Пример КС-грамматики с семантикой Монтегю

- Пусть  $\pi : A \rightarrow w_0 B_1 \dots B_r w_r$  — правило грамматики,  $\nu(\pi) = M$ , ему соответствует логическое правило

$$\frac{x_1 : B_1 \vdash v_1 \dots x_r : B_r \vdash v_r}{M[x_1, \dots, x_r] : A \vdash u_0 v_1 \dots v_r u_r}$$

## Пример КС-грамматики с семантикой Монтегю

- Пусть  $\pi : A \rightarrow w_0 B_1 \dots B_r w_r$  — правило грамматики,  $\nu(\pi) = M$ , ему соответствует логическое правило

$$\frac{x_1 : B_1 \vdash v_1 \dots x_r : B_r \vdash v_r}{M[x_1, \dots, x_r] : A \vdash u_0 v_1 \dots v_r u_r}$$

- Пример грамматики:

John : NP  $\rightarrow$  John

the : Det  $\rightarrow$  the

$x_1 x_2$  : NP  $\rightarrow$   $x_1$  : Det  $x_2$  : N

$x_1 x_2$  : VP  $\rightarrow$   $x_1$  : VTrans  $x_2$  : NP

$x_2 x_1$  : S  $\rightarrow$   $x_1$  : NP  $x_2$  : VP

read : VTrans  $\rightarrow$  reads

book : N  $\rightarrow$  book

## Пример вывода в грамматике

Вывод предложения *John reads the book* в данной грамматике.

- Начинаем с  $\text{book} \vdash N \rightarrow \text{book}$ ,  $\text{the} : \text{Det} \vdash \text{the}$ .

## Пример вывода в грамматике

Вывод предложения *John reads the book* в данной грамматике.

- Начинаем с  $\text{book} \vdash N \rightarrow \text{book}, \text{the} : \text{Det} \vdash \text{the}.$
- По правилу  $x_1 x_2 : NP \rightarrow x_1 : \text{Det} x_2 : N$   
выводим  $\text{the}(\text{book}) : NP \vdash \text{the book}.$

## Пример вывода в грамматике

Вывод предложения *John reads the book* в данной грамматике.

- Начинаем с  $\text{book} \vdash N \rightarrow \text{book}$ ,  $\text{the} : \text{Det} \vdash \text{the}$ .
- По правилу  $x_1 x_2 : NP \rightarrow x_1 : \text{Det} \ x_2 : N$   
выводим  $\text{the}(\text{book}) : NP \vdash \text{the book}$ .
- Применяя  $x_1 x_2 : VP \rightarrow x_1 : \text{VTrans} \ x_2 : NP$   
к  $\text{read} : \text{VTrans} \vdash \text{reads}$  и  $\text{the}(\text{book}) : NP \vdash \text{the book}$   
имеем  $\text{read}(\text{the}(\text{book})) : VP \vdash \text{reads the book}$ .

## Пример вывода в грамматике

Вывод предложения *John reads the book* в данной грамматике.

- Начинаем с  $\text{book} \vdash N \rightarrow \text{book}$ ,  $\text{the} : \text{Det} \vdash \text{the}$ .
- По правилу  $x_1 x_2 : NP \rightarrow x_1 : \text{Det} \ x_2 : N$   
выводим  $\text{the}(\text{book}) : NP \vdash \text{the book}$ .
- Применяя  $x_1 x_2 : VP \rightarrow x_1 : \text{VTrans} \ x_2 : NP$   
к  $\text{read} : \text{VTrans} \vdash \text{reads}$  и  $\text{the}(\text{book}) : NP \vdash \text{the book}$   
имеем  $\text{read}(\text{the}(\text{book})) : VP \vdash \text{reads the book}$ .
- Из выведенного и  $\text{John} : NP \vdash \text{John}$  получаем  
 $(\text{read}(\text{the}(\text{book}))) (\text{John}) : S \vdash \text{John reads the book}$ .

## Пример вывода в грамматике

Вывод предложения *John reads the book* в данной грамматике.

- Начинаем с  $\text{book} \vdash N \rightarrow \text{book}$ ,  $\text{the} : \text{Det} \vdash \text{the}$ .
- По правилу  $x_1 x_2 : NP \rightarrow x_1 : \text{Det} \ x_2 : N$   
выводим  $\text{the}(\text{book}) : NP \vdash \text{the book}$ .
- Применяя  $x_1 x_2 : VP \rightarrow x_1 : \text{VTrans} \ x_2 : NP$   
к  $\text{read} : \text{VTrans} \vdash \text{reads}$  и  $\text{the}(\text{book}) : NP \vdash \text{the book}$   
имеем  $\text{read}(\text{the}(\text{book})) : VP \vdash \text{reads the book}$ .
- Из выведенного и  $\text{John} : NP \vdash \text{John}$  получаем  
 $(\text{read}(\text{the}(\text{book}))) (\text{John}) : S \vdash \text{John reads the book}$ .

$$\begin{array}{c}
 \text{John} : NP \vdash \text{John} \quad \frac{\text{read} : \text{VTrans} \vdash \text{reads} \quad \frac{\text{John} : \text{book} \vdash N \rightarrow \text{book} \quad \text{the} : \text{Det} \vdash \text{the}}{\text{the}(\text{book}) : NP \vdash \text{the book}}}{\text{read}(\text{the}(\text{book})) : VP \vdash \text{reads the book}} \\
 \hline
 (\text{read}(\text{the}(\text{book}))) (\text{John}) : S \vdash \text{John reads the book}
 \end{array}$$

## Пример КС-грамматики с семантикой Монтегю

John: NP  $\rightarrow$  John

$\lambda P.\lambda Q.(\exists y(P(y) \wedge Q(y)))$ : Det  $\rightarrow$  a

$x_1 x_2$ : NP'  $\rightarrow$   $x_1$ : Det  $x_2$ : N

$\lambda z.x_2(\lambda u.(x_1(u)(z)))$ : VP  $\rightarrow$   $x_1$ : VTrans  $x_2$ : NP'

$x_2 x_1$ : S  $\rightarrow$   $x_1$ : NP  $x_2$ : VP

read: VTrans  $\rightarrow$  reads

book: N  $\rightarrow$  book

## Пример КС-грамматики с семантикой Монтегю

John: NP  $\rightarrow$  John

$\lambda P.\lambda Q.(\exists y(P(y) \wedge Q(y)))$ : Det  $\rightarrow$  a

$x_1 x_2$ : NP'  $\rightarrow$   $x_1$ : Det  $x_2$ : N

$\lambda z.x_2(\lambda u.(x_1(u)(z)))$ : VP  $\rightarrow$   $x_1$ : VTrans  $x_2$ : NP'

$x_2 x_1$ : S  $\rightarrow$   $x_1$ : NP  $x_2$ : VP

read: VTrans  $\rightarrow$  reads

book: N  $\rightarrow$  book

$$\frac{\text{book: N} \vdash \text{book} \quad \lambda P.\lambda Q.(\exists y(P(y) \wedge Q(y))) \text{: Det} \rightarrow \text{a}}{\lambda P.\lambda Q.(\exists y(P(y) \wedge Q(y)))(\text{book}) \text{: NP} \vdash \text{the book}}$$

## Пример КС-грамматики с семантикой Монтегю

John: NP  $\rightarrow$  John

$\lambda P.\lambda Q.(\exists y(P(y) \wedge Q(y)))$ : Det  $\rightarrow$  a

$x_1 x_2$ : NP'  $\rightarrow$   $x_1$ : Det  $x_2$ : N

$\lambda z.x_2(\lambda u.(x_1(u)(z)))$ : VP  $\rightarrow$   $x_1$ : VTrans  $x_2$ : NP'

$x_2 x_1$ : S  $\rightarrow$   $x_1$ : NP  $x_2$ : VP

read: VTrans  $\rightarrow$  reads

book: N  $\rightarrow$  book

$$\frac{\text{book} \vdash \text{N} \rightarrow \text{book} \quad \lambda P.\lambda Q.(\exists y(P(y) \wedge Q(y))): \text{Det} \rightarrow \text{a}}{\frac{(\lambda P.\lambda Q.(\exists y(P(y) \wedge Q(y)))(\text{book}): \text{NP} \vdash \text{a book})}{\lambda Q.(\exists y(\text{book}(y) \wedge Q(y))): \text{NP} \vdash \text{a book}}}$$

## Пример КС-грамматики с семантикой Монтегю

John: NP  $\rightarrow$  John

$\lambda P.\lambda Q.(\exists y(P(y) \wedge Q(y)))$ : Det  $\rightarrow$  a

$x_1 x_2$ : NP'  $\rightarrow$   $x_1$ : Det  $x_2$ : N

$\lambda z.x_2(\lambda u.(x_1(u)(z)))$ : VP  $\rightarrow$   $x_1$ : VTrans  $x_2$ : NP'

$x_2 x_1$ : S  $\rightarrow$   $x_1$ : NP  $x_2$ : VP

read: VTrans  $\rightarrow$  reads

book: N  $\rightarrow$  book

$$\frac{\text{read} \vdash \text{VTrans} \rightarrow \text{reads} \quad \frac{\text{book} \vdash \text{N} \rightarrow \text{book} \quad \lambda P.\lambda Q.(\exists y(P(y) \wedge Q(y))) : \text{Det} \rightarrow \text{a}}{\lambda Q.(\exists y(\text{book}(y) \wedge Q(y))) : \text{NP} \vdash \text{a book}}}{\lambda z.((\lambda Q.(\exists y(\text{book}(y) \wedge Q(y))))(\lambda u.\text{read}(u)(z))) : \text{VP} \vdash \text{reads a book}}$$

## Пример КС-грамматики с семантикой Монтегю

John: NP  $\rightarrow$  John

$\lambda P.\lambda Q.(\exists y(P(y) \wedge Q(y)))$ : Det  $\rightarrow$  a

$x_1 x_2$ : NP'  $\rightarrow$   $x_1$ : Det  $x_2$ : N

$\lambda z.x_2(\lambda u.(x_1(u)(z)))$ : VP  $\rightarrow$   $x_1$ : VTrans  $x_2$ : NP'

$x_2 x_1$ : S  $\rightarrow$   $x_1$ : NP  $x_2$ : VP

read: VTrans  $\rightarrow$  reads

book: N  $\rightarrow$  book

$$\frac{\text{read} \vdash \text{VTrans} \rightarrow \text{reads} \quad \frac{\text{book} \vdash \text{N} \rightarrow \text{book} \quad \lambda P.\lambda Q.(\exists y(P(y) \wedge Q(y))) : \text{Det} \rightarrow \text{a}}{\lambda Q.(\exists y(\text{book}(y) \wedge Q(y))) : \text{NP} \vdash \text{a book}}}{\lambda z.((\lambda Q.(\exists y(\text{book}(y) \wedge Q(y))))(\lambda u.\text{read}(u)(z))) : \text{VP} \vdash \text{reads a book}}}{\lambda z.(\exists y(\text{book}(y) \wedge \text{read}(y)(z))) : \text{VP} \vdash \text{reads a book}}$$

## Пример КС-грамматики с семантикой Монтегю

John: NP  $\rightarrow$  John

$\lambda P.\lambda Q.(\exists y(P(y) \wedge Q(y)))$ : Det  $\rightarrow$  a

$x_1 x_2$ : NP'  $\rightarrow$   $x_1$ : Det  $x_2$ : N

$\lambda z.x_2(\lambda u.(x_1(u)(z)))$ : VP  $\rightarrow$   $x_1$ : VTrans  $x_2$ : NP'

$x_2 x_1$ : S  $\rightarrow$   $x_1$ : NP  $x_2$ : VP

read: VTrans  $\rightarrow$  reads

book: N  $\rightarrow$  book

$$\begin{array}{c}
 \text{book} \vdash \text{N} \rightarrow \text{book} \quad \lambda P.\lambda Q.(\exists y(P(y) \wedge Q(y))): \text{Det} \rightarrow a \\
 \hline
 \text{read} \vdash \text{VTrans} \rightarrow \text{reads} \quad \lambda Q.(\exists y(\text{book}(y) \wedge Q(y))): \text{NP} \vdash a \text{ book} \\
 \hline
 \lambda z.((\lambda Q.(\exists y(\text{book}(y) \wedge Q(y))))(\lambda u.\text{read}(u)(z))): \text{VP} \vdash \text{reads a book} \\
 \hline
 \text{John: NP} \vdash \text{John} \quad \lambda z.(\exists y(\text{book}(y) \wedge \text{read}(y)(z))): \text{VP} \vdash \text{reads a book} \\
 \hline
 (\lambda z.(\exists y(\text{book}(y) \wedge \text{read}(y)(z)))(\text{John})): \text{VP} \vdash \text{John reads a book} \\
 \hline
 \exists y(\text{book}(y) \wedge \text{read}(y)(\text{John})): \text{VP} \vdash \text{John reads a book}
 \end{array}$$

## Пример КС-грамматики с семантикой Монтегю

$$\text{John: NP} \rightarrow \text{John}$$

$$\text{the: Det} \rightarrow \text{the}$$

$$x_1: \text{VP} / \text{NP} \rightarrow x_1: \text{VTrans}$$

$$\lambda z.(x_2(z)(x_1)): \text{S} / \text{NP} \rightarrow x_1: \text{NP} \quad x_2: \text{VP} / \text{NP}$$

$$\lambda z.(x_1(z) \wedge x_2(z)): \text{CN} \rightarrow x_1: \text{CN} \text{ whom } x_2: \text{S} / \text{NP}$$

$$x_1 x_2: \text{NP} \rightarrow x_1: \text{Det} \quad x_2: \text{N}$$

$$\text{love: VTrans} \rightarrow \text{loves}$$

$$\text{girl: N} \rightarrow \text{girl}$$

$$\frac{\frac{\text{love: VTrans} \vdash \text{loves}}{\text{John: NP} \vdash \text{John} \quad \text{love: VP} / \text{NP} \vdash \text{loves}}{\text{girl: N} \vdash \text{girl} \quad \lambda z.(\text{love}(z)(\text{John})): \text{S} / \text{NP} \vdash \text{John loves}}}{\text{the: Det} \vdash \text{the} \quad \lambda z.(\text{girl}(z) \wedge (\lambda u.(\text{love}(u)(\text{John}))))(z)): \text{CN} \vdash \text{girl whom John loves}}{\text{the}(\lambda z.(\text{girl}(z) \wedge (\lambda u.(\text{love}(z)(\text{John}))))): \text{NP} \vdash \text{the girl whom John loves}}$$