

Вопросы к зачету по курсу "Флуктуации в природе и культуре "

Каждый билет соответствует одной лекции. По каждой лекции даются варианты заданий на выбор студента. Можно решить задачу или написать эссе по изучаемому вопросу, а иногда будет так же дано графическое задание. Все сданные работы студентов считаются собственностью преподавателя и могут быть использованы при чтении курса в следующие годы.

1.

задача

Рассмотрим модель двумерного движения N молекул идеального газа в сосуде длиной a и шириной b , при температуре T . Молекулы представлены шариками радиуса r_0 , сталкивающимися друг с другом и со стенками по закону упругого удара. Шарика могут влетать в выделенный объем $V \ll ab$, через отверстие в перегородке длиной c . Найдите средние значения следующих флуктуирующих величин

- 1 Угол φ между направлением вектора скорости шарика и осью OX
- 2 Угол ψ падения шарика на стенку
- 3 Проекция v_x скорости шарика на ось OX
- 4 Координата шарика x
- 5 Величина равная 1, если последнее столкновение шарика со стенкой было именно с левой стенкой (длиной a), и равная 0, если с другой стенкой
- 6 Число шариков M_V , оказавшихся в данный момент в выделенном малом объеме V

тема для эссе

Прокомментируйте отрывок из Божественной комедии Данте Алигьери. Какие флуктуирующие величины тут упомянуты?

64

Я под случайным мыслю всякий вид
Созданий, все, что небосвод кружащий
Через семя и без семени плодит.

67

Их воск изменчив, наравне с творящей
Его средой, и потому чекан
Дает то смутный оттиск, то блестящий.

70

Вот почему, при схожести семян,

Бывает качество плодов неравно,
И разный ум вам от рожденья дан.

73

Когда бы воск был вытоплен исправно
И натиск силы неба был прямой,
То блеск печати выступал бы явно.

76

Но естество его туманит мглой,
Как если б мастер проявлял уменье,
Но действовал дрожащею рукой.

2.

задача

Найдите математическое ожидание и дисперсию для случайной величины, распределенной по нормальному закону

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{(x - m_1)^2}{2\alpha}\right)$$

тема для эссе

Опишите процесс в доске Гальтона с точки зрения шарика, движущегося в ней.

тема для эссе

Приведите примеры из литературы, когда большие отклонения от среднего значения какой-либо характеристики персонажа играли существенную роль в развитии событий (Дюймовочка (рост), Шерлок Холмс (ум), Обломов (лень))

тема для эссе

Назовите авторов или художников, чей авторский стиль можно узнать по тому признаку, что какая-то величина принимает значения, далеко отстоящие от среднестатистических.

(Например, в работах художников-примитивистов у всех людей большие головы)

3.

задача

Найдите математическое ожидание и дисперсию для случайной величины, распределенной по закону Пуассона

$$P_k = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}, \quad k \geq 0$$

тема для эссе

Приведите свои примеры величин, распределенных по закону Пуассона.

графическое задание

Изобразите предмет, в основе дизайна которого лежит пуассоновская последовательность каких-либо элементов.

4.

задача

Запишите управляющее уравнение для процесса распада атома с периодом полураспада λ и сравните с уравнением для процесса Пуассона.

задача

Рассмотрите ассиметричное одномерное случайное блуждание на дискретной решетке, описывающее диффузию в присутствии внешней силы. Вероятность скачка направо $p > 1/2$. Найдите первый и второй моменты.

тема для эссе

Найдите примеры изменяющихся дискретных величин в истории и литературе (например, число крупных городов, входивших в состав Византийской империи; число сопровождающих Фродо). При каком условии изменение этого числа можно считать марковским?

5.

задача

В сосуде с молекулами идеального газа есть воображаемая перегородка перпендикулярная оси ОХ. Импульсный процесс описывает моменты пересечения молекулами этой перегородки в положительном и отрицательном направлениях вдоль оси ОХ. Постройте график ИП, соответствующий следующим ситуациям:

- 1 Пересечение единственной частицей в сосуде воображаемой перегородки
- 2 Пересечение одной, выделенной из многих, частицей в газе воображаемой перегородки
- 3 Пересечение любой частицей в газе воображаемой перегородки.

задача

Броуновская частица совершает переходы между двумя потенциальными ямами под действием тепловых шумов. При этом она большую часть времени находится в той или другой потенциальной яме, причем, чем глубже яма, тем дольше среднее время пребывания в ней частицы. ИП описывает переходы через потенциальный барьер в ту или иную сторону. Постройте график ИП. Рассмотрите так же случай двух ям одинаковой глубины.

тема для эссе

Проанализируйте влияние на историю народа внешних импульсных процессов (например, засуха, нашествие саранчи, набеги кочевников). Оцените примерно статистические характеристики этих процессов.

6.

задача

Рассмотрим процесс регистрации космических частиц счетчиком с рефрактерным временем. Регистрация каждой частицы моделируется δ -импульсом в соответствующий момент времени с постоянной амплитудой f_0 . Он представляет собой важный пример процесса с регулируемой периодичностью: импульсный пуассоновский процесс $\eta(t)$ с рефрактерным временем ϑ_0 (ИП-ПРВ). Докажите, что $T = \vartheta_0 + 1/p$. А именно, если среднее время между двумя последовательными регистрациями частиц T будет фиксированным,

то, чем больше рефрактерное время ϑ_0 , тем больше вероятность p появления следующего импульса, как только это время задержки закончится. В пределе $\vartheta_0 \rightarrow T$ получается периодический процесс. Таким образом можно регулировать периодичность процесса, меняя ϑ_0 .

тема для эссе

Приведите примеры стихотворений с простым периодическим ритмом; наоборот, верлибр, где почти никакой периодичности нет. И наиболее удачное, на Ваш взгляд, стихотворение с точки зрения периодичности ритма.

тема для эссе

Рассмотрите, как удается избежать унылой периодичности в дизайне знаменитых лестниц и оград.

графическое задание

Изобразите несколько однотипных орнаментов с разной степенью периодичности. Какой из них Вы считаете наиболее красивым?

7.

задача

Частица делает скачки длиной в 1 сантиметр. После каждого скачка она меняет направление движения случайным образом. Найдите с помощью вычислений или экспериментально, на какое в среднем расстояние она удалится от точки начала движения за 25 шагов, за 36 шагов, за 49 шагов.

тема для эссе

Сравните блуждания различных литературных героев (например, сумрачный лес у Данте, Хэмптон-Кортский лабиринт у Джерома).

8.

задача

Найдите информацию, заключенную в 4-х ответах на вопросы, предполагающие ответы "Да" и "Нет" если во всех вопросах вероятность ответа "Да" вдвое больше вероятности ответа "Нет".

тема для эссе

Дайте определение температуры и энтропии с точки зрения различных персонажей и исторических личностей.

9.

задача

Для преобразования Пекаря найдите показатель Ляпунова.

тема для эссе

Приведите примеры мелочей, определивших развитие приключенческого сюжета или хода истории.

графическое задание

Изобразите природные объекты, в основе которых ветвящиеся структуры.

.
.

10.

задача

В рассеивающем математическом бильярде площадью Ω движется частица. Докажите, что если скорость постоянна, то распределение в фазовом пространстве имеет вид

$$(\Omega 2\pi)^{-1}$$

тема для эссе

Напишите диалог двух шариков в бильярде с рассеивающей границей, стартующих с близкими начальными условиями.

тема для эссе

Дайте определения работы и количества теплоты с точки зрения различных персонажей и исторических личностей.

графическое задание

Изобразите предмет, в основе дизайна которого лежит траектория частицы в бильярде.

11.

задача

Рассмотрим флуктуации поршня массой m и площадью S в вертикальном цилиндрическом сосуде. Над поршнем вакуум, а под ним одноатомный идеальный газ из N частиц, поддерживаемый при температуре T . Вверх поршень подталкивают удары частиц газа, как гигантскую одномерную броуновскую частицу, а вниз на него действует сила тяжести. Вдоль вертикальной оси Ox поршень совершает случайные колебания около положения равновесия. СДУ для такого поршня можно записать в соответствии со вторым законом Ньютона

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - mg + pS + \xi(t).$$

Случайные силы $\xi(t)$ характеризуются равновесным значением $D_\xi = kT\gamma$. Рассмотрим флуктуации поршня на временах больших времени релаксации, то есть передемпфированную систему, тогда слагаемым со второй производной можно пренебречь. Подставляем выражение для давления из уравнения Менделеева-Клапейрона $p = NkT/(Sx)$ и получаем СДУ в стандартной форме

$$\dot{x} + \frac{mg}{\gamma} - \frac{NkT}{\gamma x} = \frac{1}{\gamma} \xi(t).$$

Докажите, что стационарное распределение флуктуаций поршня является гамма-распределением и имеет вид

$$w_{st}(x) = Cx^N \exp\left(-\frac{mgx}{kT}\right).$$

тема для эссе

Покажите соотношение сил порядка (культурный герой) и хаоса (трикстер) в мифах. (Например, Аполлон и Дионис; Тор и Локи)

12.

задача

Запишите СДУ для бистабильной системы под воздействием гармонического возмущения. А именно, для броуновской частицы, находящейся в поле с потенциальной энергией

$$V = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4.$$

тема для эссе

Расположите известные Вам архитектурные стили в порядке возрастания разброса основных размеров и пропорций и, соответственно, уменьшения строгости канонов.

тема для эссе

Разберите следующие пары зарифмованных слов на три группы, соответствующие трем поэтам: Симеону Полоцкому — поэту XVII в., Николаю Гумилеву — поэту Серебряного века Русской поэзии, и Ренате Мухе, писавшей смешные стихи для современных детей. Основной подсказкой будет степень случайности, спонтанности этих рифм, которая нарастала со временем.

1. Этаже — уже 2. Упрямый — дамы 3. Жити — быти 4. Белою — делаю
5. Арктической — практически 6. Родителю — благодетелю 7. Бежит она — неожиданно 8. Кровавой — право 9. Старости — юности 10. Гонимый — держимый 11. Тонкий — гипопотомки 12. Соблазна — крестообразно 13. Насмерть — насморк 14. Плененный — замкненный 15. Вдохнуть — грудь.

графическое задание

Изобразите один и тот же портрет или предмет несколько раз: с большим количеством мелких случайных деталей и отклонений от симметрии, совсем без них, и промежуточные состояния. Какое изображение Вам больше нравится?

13.

задача

Из двух формул одна описывает стопку экзаменационных билетов, а вторая игральную кость

$$S = k \ln 6, \quad \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{f(t_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{f(t)}{f(t_0)} = \ln 2.$$

Определите, какая что описывает, и что это за величины.

тема для эссе

Предложите новый способ генерации случайных чисел и докажите его преимущества перед существующими.

тема для эссе

Опишите, каким, на Ваш взгляд, было влияние азартных игр на дворянское общество в XIX веке?

14.

задача

Активные броуновские частицы движутся с постоянными скоростями и ударяются в стенки сосуда. Докажите, что распределение углов падения частиц будет

$$w(x) = \frac{1}{2} \cos(\varphi).$$

тема для эссе

Возьмите короткий, хорошо известный текст (например, "Наша Таня громко плачет...") и добавьте в него много случайных деталей. Что произошло с текстом?

тема для эссе

Поразмышляйте над соотношением понятий "оригинальность" и "случайность" на примерах работ современных архитекторов и дизайнеров (Фриденсрайх Хундертвассер, Ренцо Пиано, Антуан Предок)

графическое задание

Рассмотрите превращение геометрических фигур в животных в работах Эшера. Предположив, что реалистичное изображение соответствует оптимальному количеству случайных деталей, попробуйте продолжить этот ряд, изобразив этих же животных с чрезмерно большим количеством случайных отклонений, так, чтобы они в результате совсем затерялись в хаосе случайных линий.