

# Геометрия плоского мира, сферического мира и мира Лобачевского

## *Примерные вопросы к зачету*

1. Доказать, что прямые на евклидовой плоскости являются кратчайшими.
2. Доказать, что изометрия евклидовой плоскости сохраняет углы.
3. Вывести формулы для поворота в прямоугольной системе координат.
4. Сколько неподвижных точек может иметь изометрия плоскости?
5. Сформулировать и доказать теорему Шаля о классификации движений плоскости.
6. Дать определение группы и показать, что изометрии плоскости образуют группу относительно композиции.
7. Что такое ортогональная матрица? Доказать, что ортогональные матрицы образуют группу относительно умножения. Как в матричном виде записываются изометрии плоскости?
8. Что такое аффинное преобразование плоскости? Доказать, что отношение длин параллельных отрезков является аффинным инвариантом.
9. Сформулировать теорему о структуре аффинного преобразования плоскости.
10. Доказать, что при центральном проецировании сохраняется двойное отношение четырех точек на прямой.
11. Описать модель проективной плоскости. Что является точками и прямыми на ней?
12. Что такое однородные координаты точки на проективной плоскости? Как задается бесконечно удаленная прямая?
13. Как в координатах записываются проективные преобразования?
14. Доказать, что дуги больших кругов являются локально-кратчайшими на двумерной сфере.
15. Сформулировать и доказать теорему о сумме углов треугольника на двумерной сфере.
16. Сформулировать и доказать теорему Пифагора на двумерной сфере.
17. Сформулировать и доказать теорему синусов на двумерной сфере.
18. Сформулировать и доказать теорему косинусов на двумерной сфере.
19. Что является окружностью в сферической геометрии? Вывести формулу для длины окружности на двумерной сфере. Как вычисляется площадь круга на двумерной сфере?
20. Почему сферическая геометрия не изометрична плоской даже локально?
21. Сколько неподвижных точек может иметь изометрия двумерной сферы? Сформулировать и доказать теорему о классификации изометрий сферы.
22. Что такое стереографическая проекция? Вывести явные формулы для нее.

23. Доказать, что стереографическая проекция сохраняет углы.
24. Доказать, что дробно-линейные преобразования пополненной комплексной плоскости образуют группу относительно композиции.
25. Доказать, что дробно-линейное преобразование однозначно определяется образами любых трех точек.
26. Доказать, что дробно-линейные преобразования сохраняют углы.
27. Доказать, что дробно-линейные преобразования переводят обобщенные окружности в обобщенные окружности.
28. Как представить группу движений двумерной сферы в матричном виде?
29. Вывести формулы для стереографической проекции псевдосферы мнимого радиуса.
30. Что является прямыми в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского в единичном круге?
31. Как перейти от модели Пуанкаре в единичном круге к модели Пуанкаре в верхней полуплоскости?
32. Вывести формулу для расстояния между точками в модели геометрии Лобачевского в верхней полуплоскости.
33. Сформулировать теорему о сумме углов треугольника на плоскости Лобачевского.
34. Сформулировать теоремы Пифагора, синусов и косинусов в геометрии Лобачевского.
35. Описать изометрии геометрии Лобачевского для модели Пуанкаре в единичном круге и в верхней полуплоскости.
36. Что является окружностью в геометрии Лобачевского? Как вычисляется длина окружности и площадь круга? Почему геометрия Лобачевского не изометрична плоской геометрии даже локально?