

Геометрия плоского мира, сферического мира и мира Лобачевского

Доц. С. В. Смирнов

Лекция 1

Евклидова геометрия: неравенство треугольника и прямые как кратчайшие. Изометрии и их свойства, неподвижные точки. Теорема Шаля о классификации движений плоскости. Формулировка теоремы о классификации движений в трехмерном пространстве.

Лекция 2

Групповые свойства движений. Понятие группы. Инварианты действия группы. Эрлангенская программа Клейна. Матрицы и операции над ними, определитель (для матриц размера 2 и 3). Матричная запись изометрий плоскости. Ортогональные матрицы и ортогональная группа.

Лекция 3

Аффинная геометрия: аффинные преобразования плоскости и их свойства. Инварианты действия аффинной группы. Неподвижные точки и инвариантные прямые. Теорема о структуре аффинного преобразования.

Лекция 4

Понятие о проективной геометрии. Центральные проектирования и их инварианты. Проективные преобразования.

Лекция 5

Модель проективной плоскости, точки и прямые на проективной плоскости. Бесконечно удаленная прямая и теория перспективы. Однородные координаты и проективная группа.

Лекция 6

Геометрия двумерной сферы, кратчайшие. Сумма углов сферического треугольника, сферическая теорема Пифагора, теорема синусов и теорема косинусов. Длина окружности и площадь круга в сферической геометрии. Локальная неизометричность сферической и евклидовой геометрий.

Лекция 7

Изометрии геометрии на сфере и их классификация.

Лекция 8

Стереографическая проекция и ее свойства. Комплексные числа и операции над ними, модуль и аргумент.

Лекция 9

Свойства дробно-линейных преобразований комплексной плоскости, группа Мёбиуса. Дробно-линейные преобразования и изометрии двумерной сферы, матричное представление.

Лекция 10

Геометрия на псевдосфере мнимого радиуса и стереографическая проекция. Модель Пуанкаре геометрии Лобачевского в единичном круге. Прямые в геометрии Лобачевского.

Лекция 11

Модель геометрии Лобачевского в верхней полуплоскости. Формула для расстояния между точками, теорема Пифагора, теоремы синусов и косинусов. Теорема о сумме углов треугольника.

Лекция 12

Изометрии геометрии Лобачевского. Формулы для длины окружности и площади круга (без доказательства). Понятие о пространствах постоянной кривизны и сравнение трех геометрий: евклидовой, сферической и геометрии Лобачевского.